UNIVERSITATEA DE ŞTIINȚE AGRICOLE ŞI MEDICINĂ VETERINARĂ „ION IONESCU DE LA BRAD”, IAŞI

FACULTATEA DE AGRICULTURĂ

SPECIALIZAREA AGRICULTURĂ

MATEMATICĂ ŞI STATISTICĂ

Asist.univ.drd.CARMEN CLIM

IAŞI 2007

CUPRINS

ALGEBRĂ LINIARĂ	3
SPAȚII LINIARE REALE	18
PROGRAMARE LINIARĂ	27
ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR	44
ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ	64
REFERAT NR.1	76
REFERAT NR. 2	78
BIBLIOGRAFIE	80

CAPITOLUL I

ALGEBRĂ LINIARĂ

1.1. Matrice şi determinanți

În cele ce urmează vor fi prezentate câteva definiții şi proprietăți elementare din algebra matriceală, limitându-ne la elementele care vor fi utilizate în următoarele secțiuni şi capitole.

Definiția 1.1.1.

a) Numim ***matrice cu m linii şi n coloane*** un tablou cu m linii şi n coloane, de forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ale cărui elemente $\mathbf{a_{ij}}$ sunt numere reale sau complexe.

b) Numerele $\mathbf{a_{ij}}$ **,** i= 1,..., m, j= 1,..., n se numesc ***elementele matricei A*****.**

c) O matrice cu m linii şi n coloane se numeşte *matrice de tipul (m,n)* sau *matrice de ordinul m x n*.

Notații: a) $\mathbf{A=(a_{ij})}$ **.....**sau $\mathbf{A_{m,n.}}$**.**

b) Mulțimea matricelor de tipul (m,n) cu elemente numere reale se notează $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{R})$.

Cazuri particulare:

1. O matrice de tipul **(m,1)** se numeşte ***matrice-coloană*** și are forma:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}}\\ \mathbf{a_{21}}\\ \mathbf{.....}\\ \mathbf{a_{m1}}\end{pmatrix}.$$

2. O matrice de tipul **(1,n)** se numeşte ***matrice-linie*** şi are forma: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{.....} & \mathbf{a_{1n}}\end{pmatrix}$.
3. O matrice de tipul (m,n) se numeşte ***nulă*** dacă are toate elementele egale cu zero. Se notează cu

$$O_{m,n}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{.....} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{.....} & \mathbf{0}\\ \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{.....} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

4. Dacă **m=n**, atunci matricea se numeşte ***pătratică de ordin n*** şi are forma

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{.....} & \mathbf{a_{1n}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{.....} & \mathbf{a_{2n}}\\ \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....}\\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{.....} & \mathbf{a_{nn}}\end{pmatrix}$$

Sistemul de elemente (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) formează ***diagonala principală a matricei.***

Sistemul de elemente (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{n1}) formează ***diagonala secundară a matricei.***

Matricea pătratică ale cărei elementecare nu se află pe diagonala principală sunt toate nule, se numeşte ***matrice diagonală.***

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....} & \mathbf{.....}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a_{nn}}\end{pmatrix}\underline{\underline{\mathbf{not}}}\,\mathrm{diag}.(\mathbf{a_{11}},\mathbf{a_{22}},\mathbf{a_{33}},.....\mathbf{a_{nn}})$$

Matricea diagonală pentru care $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=1$ se numeşte matricea unitate de ordinul n. Se notează cu $I_n=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$....

Definiția 1.1.2.

Fie $A, B\in M_{(m,n)}(R)$, $A=(a_{ij})$ şi $B=(b_{ij})$. Spunem că matricele A şi B sunt ***egale*** şi scriem A=B, dacă $a_{ij}=b_{ij}$ pentru toți $\mathbf{i}=\overline{\mathbf{1,m}}$ şi $\mathbf{j}=\overline{\mathbf{1,n}}$.

Operații cu matrice

Definiția 1.1.3.

Fie A, B$\in M_{(m,n)}(R)$, A=(a_{ij}) şi B=(b_{ij}). Definim ***suma*** matricelor A şi B ca fiind matricea C$\in M_{(m,n)}(R)$, C=(c_{ij}), unde

$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij,}$ pentru toți $i=\overline{1,m}$ şi $j=\overline{1,n}$.

Notație: C=A+B.

Proprietățile adunării matricelor

1. (A+B)+C=A+(B+C). (**asociativitate)**
2. A+B=B+A**. (comutativitate)**
3. A+O=O+A=A, (∀)A$\in M_{(m,n)}(R)$ (**element neutru)**.
4. (∀)A$\in M_{(m,n)}(R)$, (∃)–A=$(-a_{ij})\in M_{(m,n)}(R)$, astfel încât A+(-A)=(-A)+A=O.(**opusa matricei A**)

Definiția 1.1.4.

Fie A$\in M_{(m,n)}(R)$ şi B.$\in M_{(n,p)}(R)$, A=(a_{ij}) şi B=(b_{jk}). Definim ***produsul*** A●B (în această ordine) ca fiind matricea C=A●B$\in M_{(m,p)}(R)$, C=(c_{ik}), unde

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

Observație. Produsul A●B a două matrice se poate efectua doar dacă numărul de coloaneale lui A este egal cu numărul de linii ale lui B.

Proprietățile înmulțirii matricelor

1. **(A·B)·C=A·(B·C).(asociativitate)**
2. **A·(B+C)=A·B+A·C (distributivitate la stânga)**
3. **(A+B)·C=A·C+B·C (distributivitate la dreapta)**
4. **(∀)A$\in M_n(R)$, $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$ (element neutru)**

Definiția 1.1.5.

Definim ***produsul matricei*** A$\in M_{(m,n)}(R)$, A=(a_{ij}) cu ***scalarul $\alpha\in R$***, ca fiind matricea B$\in M_{(m,n)}(R)$, B=(b_{ij}), cu matricea: $b_{ij}=\alpha.a_{ij,}$

(∀)i=$\overline{1,n}$, (∀)j=$\overline{1,m}$

Notație: $B=\alpha A$.

Definiția 1.1.6.

Numim ***transpusă*** a matricei $A\in M_{(m,n)}(R)$, matricea notată ${}^tA=(a_{ji})\in M_{(n,m)}(R)$, care are drept linii, respectiv coloane, coloanele, respectiv liniile matricei A.

Definiția 1.1.7.

Spunem că matricea pătratică $A\in M_n(R)$ este ***simetrică*** dacă ${}^tA=A$, adică $a_{ij}=a_{ji}$, $(\forall)i,j=\overline{1,n}$ şi ***antisimetrică***, dacă ${}^tA=-A$, adică $a_{ji}=-a_{ij}$, $(\forall)i,j=\overline{1,n}$.

Determinanți

Definiția 1.1.8.

Fie $\mathbf{A=(a_{ij})\in M_n(R)}$, o matrice pătratică. Determinantul matricei A este numărul real **det(A)** dat de: $\det(A)=\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau)\cdot a_{1\tau(1)}\cdot a_{2\tau(2)}\cdot .....\cdot a_{n\tau(n)}$,

unde $\mathbf{S_n}$ este mulțimea permutărilor mulțimii $\mathbf{N=\{1, 2, 3, \ldots, n\}}$, iar $\boldsymbol{\varepsilon(\tau)}$ este signatura permutării $\boldsymbol{\tau}$.

Notație:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Rangul unei matrice

Definiția 1.1.9.

Fie A o matrice de tipul (m,n). Dacă în A alegem aleator k linii şi k coloane, $k\leq \min\{m,n\}$, atunci elementele care se găsesc la intersecția acestor linii şi coloane formează o matrice pătraticăde ordinul k, al cărui determinant se numeşte ***minor de ordinul k*** al matricei A.

Definiția 1.1.10.

Fie $A \in M_{(m,n)}(R)$ o matruce nenulă. Spunem că matricea A are ***rangul r*** dacă A are un minor de ordinul r nenul şi toți minorii lui A de ordin mai mare decât r, dacă există, sunt nuli

Notație: rang A=r.

Matrice inversabile

Definiția 1.1.11.

O matrice pătratică se numeşte ***singulară*** dacă determinantul său este nul, şi se numeşte ***nesingulară*** dacă determinantul său este nul.

Definiția 1.1.12.

Fie A o matrice pătratică de ordinul n. Spunem că A este inversabilă dacă există o matrice pătratică de ordinul n,notată $\mathbf{A^{-1}}$astfel încât:

$\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$.

Teoremă 1.1.13.

O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă este nesingulară.($\det A \neq 0$).

Definiția 1.1.14.

Numim **transformări elementare** asupra matricei A aplicarea uneia din următoarele operații:

T1. Înmulțirea unei linii (coloane) cu un număr diferit de zero.

T2. Adunarea unei linii (coloane) la o altă linie (coloană), element cu element.

T3. Schimbarea a două linii (coloane) între ele.

Observație.

a) Dacă asupra unei matrice A aplicăm transformări elementare, rangul acesteia nu se schimbă.

b) Folosind tranformări elementare numai asupra liniilor pentru determina mai simplu inversa unei matrice.

Fie $\mathbf{A \in M_n(R)}$ şi blocul matriceal **B=[A/In]**. Dacă există $\mathbf{A^{-1}}$ atunci vom avea: $\overline{B} = \overline{A^{-1}B} = \left[A^{-1}A / A^{-1}I_n\right] = \left[I_n / A^{-1}\right]$.

Exemplul 1 Să se determine inversa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rezolvare:

$$\left[A / I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 : 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 3L_1]{L_2 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \cdot (-2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 + 2L_3]{L_1 - 1/2 L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

1.2 Sisteme de ecuații liniare

În continuare ne vom ocupa de sistemele de ecuații algebrice de gradul întâi cu mai multe necunoscute, deoarece multe fenomene din natură se pot modela cu ajutorul acestora.

Definiția 1.2.1.

a) Se numeşte ***sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute*** ansamblul de ecuații liniare:

$$[1]\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases},$$

$a_{ij}, b_i \in R$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

b) Variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ se numesc ***necunoscutele sistemului.***

Numerele $a_{ij} \in R$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ se numesc ***coeficienții sistemului.***

Numerele $b_i \in R$, $1 \le i \le m$ se numesc ***termeni liberi.***

Observație a) Coeficienții necunoscutelor formează o matrice de tip (m,n);

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ care se numeşte ***matricea sistemului***.

b) Sistemul (1) poate fi condensat sub forma:

$$[2]\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \text{, unde } i = \overline{1,m}.$$

c) Dacă notăm cu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{pmatrix}$ vectorul coloană al termenilor liberi,

iar $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_n \end{pmatrix}$ este vectorul coloană al necunoscutelor, atunci sistemul (1) se poate scrie sub formă matriceală:

$$[3]\ A \cdot X = B$$

d) Matricea $\overline{A} \equiv (A/B)$ se numeşte ***matricea extinsă*** a sistemului.

e) dacă $b_i=0$, $1\le i\le m$, atunci sistemul liniar se numeşte ***omogen***.

Definiția 1.2.2.

a)Un n-uplu $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\in \mathbf{R}^n$ care verifică simultan cele m ecuații ale sistemului (1) se numește ***soluție*** a sistemului .

b)Dacă un sistem are soluții se numeşte ***compatibil*** şi ***incompatibil*** în caz contrar. Un sistem compatibil care admite o **unică** soluție se numeşte **determinat**, iar dacă admite cel puțin două soluții se numeşte **nedeterminat**. Două sisteme care admit aceleaşi soluții se numesc **echivalente**.

Aplicând transformări elementare **numai** asupra liniilor matricei extinse a sistemului [1] se obține un sistem echivalent cu acesta.

Fie **r=rang(A)**. Un minor nenul de ordinul **r** al matricei **A** se numeşte **minor principal**.

Ecuațiile şi necunoscutele ale căror coeficienți intră în formarea acestui minor se numesc **principale**. Minorii de ordinul **(r+1)** obținuți prin bordarea minorului principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi, precum şi cu cele ale uneia dintre liniile corespunzătoare unei ecuații secundare se numesc **minori caracteristici**.

Pentru un sistem de m ecuații şi având rangul matricei sistemului **r=rang(A)**, există minori caracteristici numai dacă **m>r**, iar numărul lor este **(m-r)**.

Sisteme liniare omogene

Dacă $\mathbf{b_i=0}$, $\forall i=\overline{1,m}$ sistemul [1] se numeşte sistem liniar **omogen**.

Forma generală a acestuia este:

[4] $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = 0,\ i=\overline{1,m}$.

Observație. un astfel de sistem este oricând compatibil întrucât admite cel puțin soluția banală: $\mathbf{x_1=x_2=\ldots..=x_n=0}$.

Un sistem liniar omogen de rang **r=rang(A)** şi cu n necunoscute admite şi soluțiile nebanale dacă şi numai dacă **r<n**.

Un sistem liniar omogen de n ecuații cu n necunoscute admite şi soluții nebanale dacă şi numai dacă **det(A)=0**.

Rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare

1.Un sistem algebric liniar pentru care **r=m=n** se numeşte **sistem Cramer**.

Formula generală a acestuia este:

[5] $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,n}$, unde **det (A)≠0**.

Este un sistem compatibil unic determinat şi soluția sa se obține cu formulele lui Cramer:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},\quad j=\overline{1,n},$$

unde $\mathbf{A_j}$ se obține din matricea **A** prin înlocuirea coloanei **j** cu coloana termenilor liberi.

2.Dacă **r=m=n**, atunci există $\mathbf{A^{-1}}$ şi din [3] obținem: $\mathbf{X=A^{-1}\cdot B}$, formulă care reprezintă rezolvarea matriceală a unui sistem liniar omogen de n ecuații cu n necunoscute şi de rang n.

3.**Metoda eliminării parțiale (Gauss)**. Presupunem că $\mathbf{det(a_{ij})\neq 0}$, $i,j=\overline{1,r}$ şi, deci **r=rang(A)**, dacă nu există determinanți de ordin superior lui **r**, nenuli.

Prin transformări elementare efectuate **numai** asupra liniilor matricei extinse $\overline{A}$ a sistemului [1] aceasta poate fi adusă la forma:

$$\overline{P}=\left(\begin{array}{cccccc|c} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1r} & \ldots & p_{1n} & q_1 \\ 0 & p_{22} & \ldots & p_{2r} & \ldots & p_{2n} & q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{rr} & \ldots & p_{rn} & q_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & q_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & q_m \end{array}\right),$$ în care: $p_{ii}\neq 0, i=\overline{1,r}$.

Sistemul care are drept matrice extinsă, matricea $\overline{P}$ este echivalent cu sistemul [1].

Observație. Dacă **r=m**, sistemul [1] este compatibil. Dacă **r<m** sistemul [1] este compatibil dacă şi numai dacă: $\mathbf{q_{r+1}=q_{r+2}=\ldots=q_m=0}$.

Dacă sistemul este compatibil şi **r=n** el are o singură soluție, adică este compatibil determinat, iar dacă **r<n**, sistemul admite ∞^{n-r} soluții, adică este compatibil nedeterminat.

4.**Metoda eliminării totale (Gauss-Jacobi)**. Fie **r=rang(A)**. presupunem că **$\det(a_{ij})\neq 0$**, **$i,j=\overline{1,r}$**. Prin transformări elementare asupra liniilor matricei extinse $\overline{A}$, a sistemului [1] aceasta poate fi adusă la forma în care toate elementele nediagonale ale primelor **r** coloane ale matricei obținute sunt nenule, iar celelalte nule.

Astfel analiza structurii sistemului este imediată.

Exemplul 1: Folosind metoda lui Gauss, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -1 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1:4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/4 & 9/4 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/4 & 9/4 \\ 0 & -5/2 & 9/4 & 19/4 \\ 0 & 3/2 & 5/4 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2\bullet(-2/5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & -9/10 & -19/10 \\ 0 & 3/2 & 5/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3-3/2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & -9/10 & -19/10 \\ 0 & 0 & 13/5 & 13/5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3\bullet 5/13} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & -9/10 & -19/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 = \frac{9}{4} \\ x_2 - \frac{9}{10}x_3 = -\frac{19}{10} \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Exemplul 2: Folosind metoda lui Gauss Jacobi, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 20\\ 2 & -3 & 1 & -5\\ 6 & -4 & 4 & 30\end{array}\right)\xrightarrow[L_3-6L_1]{L_2-2L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 20\\ 0 & -5 & -1 & -45\\ 0 & -10 & -2 & -90\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\bullet(-1/5)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 20\\ 0 & 1 & 1/5 & 9\\ 0 & -10 & -2 & -90\end{array}\right)\xrightarrow[L_3+10L_2]{L_1-L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4/5 & 11\\ 0 & 1 & 1/5 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Sistemul este compatibil nedeterminat:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{41}{5}x_3=11\\ x_2+\dfrac{1}{5}x_3=9\\ x_3=\alpha\in R\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=11-\dfrac{4}{5}\alpha\\ x_2=9-\dfrac{1}{5}\alpha\ ,\ \alpha\in R\\ x_3=\alpha\end{cases}$$

1.3 Inegalități liniare şi sisteme de inegallități liniare

În aplicațiile metodelor matematice apar situații în care anumite fenomene se modelează nu prin ecuții liniare, ci prin inegalități liniare(obținute prin înlocuirea în expresia formei generale a unei ecuații liniare a semnului = cu unul din semnele($\leq, \geq, <, >$,).

Definiția 1.3.1. a)Se numeşte ***inegalitate liniară*** sau ***inecuație liniară*** în două variabile x şi y, expresia $ax + by \begin{Bmatrix} < \\ \leq \\ > \\ \geq \end{Bmatrix} c$.

unde acoladele indică faptul că, pe poziția respectivă, trebuie folosit, după caz, unul din cele patru simboluri.

b) Se numeşte soluție a inegalității liniare date mulțimea perechilor ordonate (x,y) care satisfac inegalitatea.

Pentru a reprezenta grafic o inegalitate liniară în două variabile trebuie sa reprezentăm mulțimea soluțiilor sale, care va fi o mulțime de puncte în plan.
Astfel, se pleacă de la ecuația corespunzătoare $ax + by = c$ (numită ***ecuația ataşată*** inecuației date).
Reprezentarea ei în plan este o dreaptă, deci mulțimea punctelor reprezintă geometric mulțimea soluțiilor ecuației.
Dreapta d: ax +by=c împarte planul în două regiuni, numite ***semiplane***. Aceasta dreaptă reprezintă ***frontiera*** celor două semiplane. Atunci cînd întrunul din semiplane includem şi frontiera, acesta se va numi ***semiplan închis***.Dacă frontiera nu este inclusă, avem un ***semiplan deschis***.

Etapele rezolvării unei inecuații liniare:

- Se reprezintă dreapta corespunzătoare ecuației atasate;
- Se alege un punct din plan care nu aparține dreptei şi se înlocuiesc coordonatele lui in expresia inecuației;

- Dacă rezultatul obținut în urma înlocuirii este corect din punct de vedere logic, atunci soluția inecuației este dată de întregul semiplan în care se află punctul respectiv; în caz contrar, soluția este dată de celălalt semiplan;
- Vom lua ca şi soluție semiplanul determinat, deschis, dacă inegalitatea din enunț este strictă şi închis, daca inegalitatea admite şi posibilitatea de egal.

Observație: Mai multe inegalități liniare formează ***<u>un sistem de inegalități(inecuații) liniare</u>***. Pentru a determina mulțimea soluțiilor unui astfel de sistem, se face intersecția tuturor semiplanelor ce reprezintă soluțiile inecuațiilor.

<u>Exemplul 1:</u> Să se rezolve următorul sistem de inecuații:

$$\begin{cases} 4x - y \le 8 \\ x - y \ge -1 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}.$$

Rezolvare:

Fie $d_1 : 4x - y = 8$

$x = 0 \Rightarrow y = -8 \quad A(0,-8)$

$y = 0 \Rightarrow x = 2 \quad B(2,0)$

Fie $d_2 : x - y = -1$

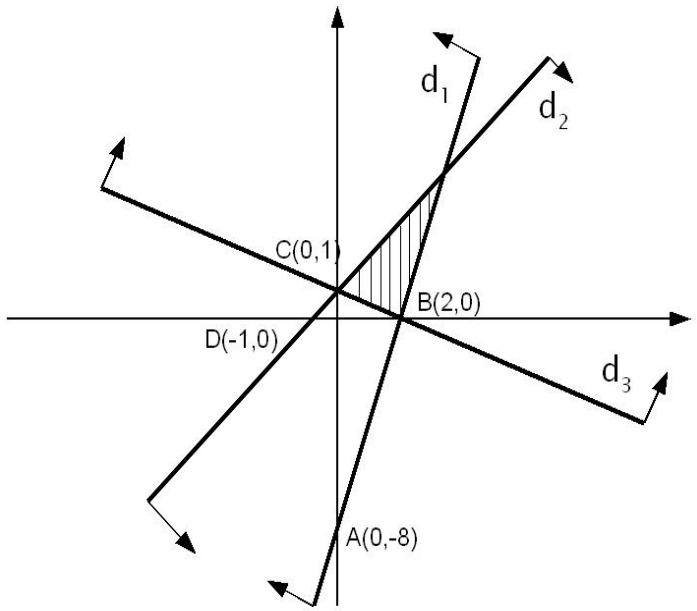
$x = 0 \Rightarrow y = 1 \quad C(0,1)$

$y = 0 \Rightarrow x = -1 \quad D(-1,0)$

Fie $d_3 : x + 2y = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 1 \quad C(0,1)$

$y = 0 \Rightarrow x = 2 \quad B(2,0)$



TEMĂ

1) Să se determine inversele următoarelor matrice:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) Să se rezolve următoarele sisteme, alegând una din metodele prezentate:

a) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4=2 \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=5 \\ -x_1+3x_2-5x_3+5x_4=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2 \\ -x_1+x_2+x_3-x_4=3 \\ -2x_1+5x_2+6x_3+4x_4=10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$

3) Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații:

a) $\begin{cases} x - 3y + 3 \le 0 \\ 2x - y + 2 \ge 0 \\ 2x + y - 4 \ge 0 \end{cases}$., b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 2 > 0 \\ x - y + 4 > 0 \end{cases}$

CAPITOLUL II

SPAȚII LINIARE REALE

2.1. Noțiuni introductive

Fie **A** o mulțime nevidă oarecare, pe care definim două operații astfel:

a) $(\forall)x, y \in A$, $(\exists)$ un element notat cu $x + y \in A$ astfel încât $(x, y) \to x + y$

b) $(\forall)x \in A, (\forall)\alpha \in R$, $(\exists)$ un element notat $\alpha x \in A$ astefl încât $(\alpha x) \to \alpha x$.

Prima operație, de tip aditiv, este internă, a doua, de tip multiplicativ, este externă pentru A.

Definiția 2.1.1.

Mulțimea **A** formează un ***spațiu liniar (vectorial) real*** dacă:

a) (**V, +**) este un grup abelian;

b) înmulțirea cu scalari îndeplinește condițiile:

1. $\mathbf{1}\cdot\bar{x} = \bar{x}, \forall \bar{x} \in \mathbf{V}$ şi $\mathbf{1} \in \mathbf{R}$,
2. $\alpha\cdot(\beta\cdot\bar{x}) = (\alpha\beta)\cdot\bar{x}$, $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $(\forall)\bar{x} \in \mathbf{V}$,
3. $\alpha\cdot(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\cdot\bar{x} + \alpha\cdot\bar{y}$, $(\forall)\alpha \in \mathbf{R}$ şi $(\forall)\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{V}$,
4. $(\alpha+\beta)\cdot\bar{x} = \alpha\cdot\bar{x} + \beta\cdot\bar{x}$, $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ şi $(\forall)\bar{x} \in \mathbf{V}$.

Observație. Elementele spațiului liniar **A** se vor nota cu $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ şi le vom numi ***vectori***. Elementul neutru al grupului (**A, +**) se notează prin $\bar{0}$ şi se numeşte ***vector nul*** iar vectorul $-\bar{x}$ se numeşte ***opusul*** *vectorului* $\bar{x}$.

Definiția 2.1.2 Fie A un spațiu liniar real şi fie $\overline{x_i} \in A, \alpha_i \in R, i = \overline{1,h}$. Se numeşte ***combinație liniară*** de vectorilor $\overline{x_i}$ cu scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \in R$ expresia:

$$E = \alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \cdots \ldots + \alpha_h \overline{x_h}$$

Scalarii α_k se numesc ***coeficienții combinației*** liniare.

Definiția 2.1.3.

Sistemul de vectori $\overline{x_i} \in A,\ i = \overline{1,h}$ se numeşte ***sistem de generatori*** pentru spațiu liniar **A** dacă orice vector este o combinație liniară de vectorii acestui sistem.

Definiția 2.1.4.

Spunem că sistemul de vectori $\overline{x_i} \in A,\ i = \overline{1,h}$ este ***liniar dependent*** dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h \in R$ **nu toți nuli** astfel încât:

[1]: $\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \cdots \ldots + \alpha_h \overline{x_h} = 0$

În caz contrar, adică dacă [1] are loc **numai** pentru $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_h = 0$ sistemul se numeşte ***liniar independent***.

Teorema 2.1.5 Un sistem de vectori liniar independenți nu poate conține vectorul nul.

Teorema 2.1.6 Într-un sistem de vectori liniar dependenți cel puțin un vector se scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

2.2 Baze într-un spațiu vectorial. Schimbări de baze şi de coordonate

Definiția 2.2.1. Sistemul de vectori $\mathbf{B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}\subset A}$ se numeşte ***bază*** a lui **A** dacă:

1. **B** formează un sistem de generatori pentru **A**;
2. **B** este liniar independent.

Observație. Într-un spațiu vectorial există o infinitate de baze. Vectorul nul, $\bar{0}$, nu poate face parte din nici o bază a spațiului vectorial **V**.

Teorema 2.2.2

Condiția necesară şi suficientă pentru ca sistemul de vectori B să fie o bază a spațiului vectorial **A** este ca orice vector al spațiului $\overline{x} \in A$ să se exprime în mod **unic** ca o combinație liniară de vectorii sistemului e adică, să existe scalarii: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, unic determinați astfel încât:

[2]: $\bar{x} = \alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2} + \cdots \ldots + \alpha_n\overline{x_n}$

Notând: $\mathbf{B=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)\in M_{(1,n)}(A)}$ şi $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M_{(n,1)}(R)}$, vectorul $\overline{x} \in A$ se poate scrie ca produsul celor două matrice, adică:

[3]: $\overline{x} = BX$

Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ din descompunerea [2] se numesc **coordonatele vectorului** $\bar{x}$ în baza B

Observație. Dacă în spațiul liniar **V** există o bază formată din n vectori, atunci orice altă bază din **V** este formată tot din n vectori. Aşadar **numărul** vectorilor din orice bază a unui spațiu liniar real este invariant.

Definiția 6.

Numărul vectorilor dintr-o bază a unui spațiu liniar (vectorial) se numeşte **dimensiune** a spațiului liniar dat.

Dimensiunea spațiului vectorial **A** se notează cu **dimA**.

Dacă **dimA=n**, spunem că **V** este n-dimensional.

Exemplu

În spațiul liniar $\mathbf{R^n}$, sistemul: $\mathbf{B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}}$, unde: $\begin{cases} \bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0) \\ \bar{e}_2 = (0,1,0,\ldots 0) \\ \bar{e}_3 = (0,0,1,\ldots,0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}_n = (0,0,0,\ldots,1) \end{cases}$

formează o bază, numită bază canonică, sau naturală, sau standard **($\dim R^n=n$)**.

Întrucât în orice spațiu vectorial A finit dimensional (dimV=n) există o infinitate de baze, se pune problema de a găsi modul în care se face trecerea de la o bază la alta şi legătura dintre coordonatele unui vector în două baze distincte.

Fie $B=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ şi $B'=(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n)$ două baze în spațiul vectorial A.

Deoarece $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n \in \mathbf{A}$ şi e este bază, avem:

[4]: $\begin{cases} \bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 + c_{31}\bar{e}_3 + \ldots + c_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}'_2 = c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + c_{32}\bar{e}_3 + \ldots + c_{n2}\bar{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}'_n = c_{1n}\bar{e}_1 + c_{2n}\bar{e}_2 + c_{3n}\bar{e}_3 + \ldots + c_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$

Sistemul [4] este echivalent cu ecuația matriceală:

$(\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)\cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & \ldots & c_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$, adică:

[5]: $\mathbf{B'=B\cdot C}$ cu $\mathbf{C=(c_{ij})\in M_n(R)}$, numită ***<u>legea schimbării de baze</u>*** în spații liniare finit dimensionale.

Observație. Coloana **j**, cu $\mathbf{j=\overline{1,n}}$ a matricei **C**, numită ***<u>matricea schimbării de baze</u>*** are drept elemente coordonatele vectorului $\bar{e}'_j \in \mathbf{A}$, în raport cu baza e.

Matricea **C** de trecere de la o bază la alta, într-un spațiu vectorial finit dimensional **A** este o matrice nesingulară, adică $\mathbf{\det C\neq 0}$.

Formulele [4] se numesc formule de trecere de la o bază **B** la baza **B'**.

Fie $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)_{(B)}$ şi $\bar{x}=(x'_1,x'_2,\ldots x'_n)_{(B')}$, adică:

$\bar{x}=x_1\cdot\bar{e_1}+x_2\cdot\bar{e_2}+\ldots x_n\cdot\bar{e_n}$, respectiv $\bar{x}=x'_1\cdot\bar{e'_1}+x'_2\cdot\bar{e'_2}+\ldots x'_n\cdot\bar{e'_n}$

Vom nota prin: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, respectiv $\mathbf{X'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_n' \end{pmatrix}$, matricele coloană ale coordonatelor vectorului $\overline{x} \in A$ în baza **B**, respectiv **B'**.

Avem: $\overline{x} = BX = B'X' = (BC)X'$ de unde: $X = CX'$ sau

[6]: $X' = C^{-1}X$, care reprezintă ***<u>legea matriceală</u>*** a schimbării coordonatelor unui vector la o schimbare de baze în spațiul liniar finit dimensional **A**.

2.3. Transformări liniare. Valori proprii şi vectori proprii pentru o transformare liniară.

Fie spațiul liniar n-dimensional $\mathbf{R^n}$.

Definiția 2.3.1 O aplicați $\mathbf{T: R^n \to R^n}$ pentru care:

1. $\mathbf{T(\bar{x}+\bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y}), (\forall)\bar{x},\bar{y} \in R^n}$,
2. $\mathbf{T(\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot T(\bar{x}), (\forall)\alpha \in R}$ şi $\mathbf{(\forall)\bar{x} \in R^n}$,

se numeşte ***transformare liniară***.

Teorema 2.3.2 Transformarea $\mathbf{T:R^n \to R^n}$ este liniară dacă şi numai dacă $\mathbf{(\forall)\alpha,\beta \in R}$ şi $\mathbf{(\forall)\bar{x},\bar{y} \in R^n}$, avem: $\mathbf{T(\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}) = \alpha \cdot T(\bar{x}) + \beta \cdot T(\bar{y})}$.

Avem: $\mathbf{T(\bar{0}) = \bar{0}}$.

Definiția 2.3.3 Se numeşte ***nucleu*** sau ***spațiul nul*** al transformării liniare **T** mulțimea: $\mathbf{KerT \overset{def}{=} \{\bar{x} \in R^n / T(\bar{x}) = \bar{0}\}}$

Numărul **d=dim KerT** se numeşte ***defectul*** transformării liniare **T** (operatorului T).

Definiția 2.3.4 Se numeşte ***imagine*** a transformării liniare **T** mulțimea:

$\mathbf{ImT \overset{def}{=} \{\bar{y} \in R^n / (\exists)\bar{x} \in R^n}$ a.î. $\mathbf{T(\bar{x}) = \bar{y}\}}$

Numărul **r=dim ImT** se numeşte rangul operatorului **T**.

Dacă $\mathbf{T:R^n \to R^n}$ este o transformare liniară iar $\mathbf{B=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}}$ este o bază în $\mathbf{R^n}$ putem scrie:

[7]: $\begin{cases} \mathbf{T(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + ... + a_{n1}\bar{e}_n} \\ \mathbf{T(\bar{e}_2) = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + ... + a_{n2}\bar{e}_n} \\ \mathbf{.....} \\ \mathbf{T(\bar{e}_n) = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + ... + a_{nn}\bar{e}_n} \end{cases}$.

Matricea $\mathbf{A=(a_{ij}) \in M_n(R)}$, ce are drept coloane coordonatele vectorilor $\mathbf{T(\bar{e}_j),\ j = \overline{1,n}}$ se numeşte ***matricea transformării liniare*** **T** în baza B.

Avem **T(B)=B·A**, iar dacă **X** este matricea coloană a coordonatelor vectorului $\mathbf{\bar{x} = (x_1, x_2, ...x_n) \in R^n}$ în baza B atunci: $T(\bar{x}) = B \cdot (A \cdot X)$.

Definiția 2.3.5 Fie $\mathbf{T:R^n \to R^n}$ o transformare liniară. Scalarul $\boldsymbol{\lambda \in R}$ se numeşte ***valoare proprie*** sau ***autovaloare*** a transformării liniare **T**, dacă există vectorul $\bar{x} \neq \bar{0}$ astfel încât $T(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x}$.

În acest caz vectorul **nenul** $\bar{x}$ se numeşte ***vectorul propriu*** sau ***autovector*** al transformării liniare **T**, corespunzător valorii proprii λ.

Dacă $\bar{x} = B \cdot X$ este un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci: $T(\bar{x}) = \lambda \cdot \bar{x} \Rightarrow B \cdot (A \cdot X) = \lambda \cdot B \cdot X \Rightarrow A \cdot X = \lambda \cdot X$ sau: $(A-\lambda \cdot I_n) \cdot X = 0$, care se scrie:

$$[8]: \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Cum $\bar{x} \neq \bar{0}$, este necesar ca sistemul [8] să admită şi soluții nebanale.

Sistemul liniar omogen [8] admite soluții nebanale dacă şi numai dacă determinantul său este egal cu zero.

Aşadar scalarul $\boldsymbol{\lambda \in R}$ este valoare proprie a transformării liniare **T** a cărei matrice în baza e este A dacă şi numai dacă:

[9]: $\mathbf{det(A-\lambda \cdot I_n)=0}$

Polinomul $\mathbf{P(\lambda)=det(A-\lambda \cdot I_n)}$ se numeşte ***polinomul caracteristic*** al matricei **A**, iar ecuația [9] se numeşte ***ecuația caracteristică*** a matricei **A**.

După determinarea valorilor proprii din [9], se înlocuiesc în [8] şi se determină coordonatele vectorilor proprii.

2.4. Lema substituției

Fie $\mathbf{B}=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ o bază a spațiului liniar $\mathbf{R^n}$, $\bar{u} \in \mathbf{R^n}$ un vector dat prin: $\bar{u}=\lambda_1\cdot\bar{e}_1+\lambda_2\cdot\bar{e}_2+\ldots.+\lambda_i\cdot\bar{e}_i+\ldots.+\lambda_n\cdot\bar{e}_n$ și sistemul de vectori $\mathbf{B'}=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_{i-1}, \bar{u}, \bar{e}_{i+1}, \ldots, \bar{e}_n\}$, obținut din B prin înlocuirea vectorului $\bar{e}_i$ cu vectorul $\bar{u}$. Au loc afirmațiile:

1. $\mathbf{B'}$ este bază în $\mathbf{R^n}$ dacă și numai dacă $\alpha_i\neq 0$,
2. dacă **B'** este bază în $\mathbf{R^n}$, atunci coordonatele $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha'_n$ în baza $\mathbf{e'}$ ale unui vector $\bar{x} \in \mathbf{R^n}$ se exprimă în funcție de coordonatele $\alpha^*_1, \alpha^*_2, \ldots, \alpha^*_i, \ldots, \alpha^*_n$ ale aceluiași vector în baza B prin egalitățile: $\alpha'_i = \frac{\alpha^*_i}{\alpha_i}$, $\alpha'_j = \alpha^*_j - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\cdot\alpha^*_i$, pentru $\mathbf{j\neq i}$.

Trecerea de la α^*_j la α'_j se poate face formal pe baza următoarei reguli cunoscută sub numele de regula dreptunghiului, pe care o prezentăm schematic mai jos.

$$\begin{array}{ccc} \langle\alpha_i\rangle & \ldots. & \alpha^*_i \\ | & & | \\ \alpha_j & \ldots. & \alpha^*_j \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & \ldots. & \alpha^*_i/\alpha_i \\ | & & | \\ 0 & \ldots. & \alpha^*_j - \frac{\alpha^*_i}{\alpha_i}\cdot\alpha_j \end{array}$$

Elementul $\alpha_i\neq 0$ se numește **pivot**.

Prin această metodă putem înlocui fiecare vector din baza **B**, schimbând în fiecare etapă câte un vector.

În practică aceste calcule se organizează, etapă de etapă, sub forma unor tablouri.

Exemplu .

Față de baza canonică $\mathbf{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ din $\mathbf{R^3}$, unde: $\bar{e}_1=(1,0,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0)$, $\bar{e}_3=(0,0,1)$ se consideră vectorul $\bar{x}=(4,1,4)$. Să se determine coordonatele sale în baza $\mathbf{B'}=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\}$, unde: $\bar{e}_1'=(1,-1,1)$, $\bar{e}_2'=(1,1,-1)$, $\bar{e}_3'=(1,2,3)$

	B (baza)	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_1'$	$\bar{e}_2'$	$\bar{e}_3'$	$\bar{x}$	
	$\bar{e}_1$	1	0	0	1	1	1	4	
(I)	$\bar{e}_2$	0	1	0	-1	1	2	1	L_2+L_1
	$\bar{e}_3$	0	0	1	1	-1	3	4	L_3-L_1

(II)	$\bar{e}_1$'	1	0	0	1	1	1	4	
	$\bar{e}_2$	1	1	0	0	2	3	5	$L_2 : (2)$
	$\bar{e}_3$	-1	0	1	0	-2	2	0	
(III)	$\bar{e}_1$'	1	0	0	1	1	1	4	$L_2 - L_1$
	$\bar{e}_2$	1/2	1/2	0	0	1	3/2	5/2	
	$\bar{e}_3$	-1	0	1	0	-2	2	0	$L_3 + 2L_1$
(IV)	$\bar{e}_1$'	1/2	-1/2	0	1	0	-1/2	3/2	
	$\bar{e}_2$'	1/2	1/2	0	0	1	3/2	5/2	
	$\bar{e}_3$	0	1	1	0	0	5	5	$L_1:5$
(V)	$\bar{e}_1$'	1/2	-1/2	0	1	0	-1/2	3/2	
	$\bar{e}_2$'	1/2	1/2	0	0	1	3/2	5/2	$L_1 + 1/2L_3$
	$\bar{e}_3$	0	1/5	1/5	0	0	1	1	$L_2 - 3/2L_1$
(VI)	$\bar{e}_1$'	1/2	-2/5	1/10	1	0	0	2	
	$\bar{e}_2$'	1/2	1/5	-3/10	0	1	0	1	
	$\bar{e}_3$'	0	1/5	1/5	0	0	1	1	

↓

$\bar{x}$ **=(2,1,1)**

.

Temă Se consideră vectorul $\bar{x} = (5,4,3)$ scris în baza canonică $\mathbf{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ din $\mathbf{R}^3$, unde: $\bar{e}_1=(1,0,0)$, $\bar{e}_2=(0,1,0)$, $\bar{e}_3=(0,0,1)$.Să se determine coordonatele sale în baza $\mathbf{B}'=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\}$, unde: $\bar{e}_1'=(0,1,1)$, $\bar{e}_2'=(1,0,1)$, $\bar{e}_3'=(1,1,0)$.

CAPITOLUL III
PROGRAMARE LINIARĂ

3.1 Structura unei probleme de programare liniară

Programarea liniară este o ramură a statisticii matematice care s-a dezvoltat necontenit, generând noi capitole cu multiple aplicații în practică, în cele mai diverse domenii de inginerie: economică, agricolă, industrială.

În programarea liniară trebuie luate anumite decizii prin aplicarea cărora să se atingă valoarea optimă a obiectivului.Aceste decizii sunt reprezentate printr-un set de variabile de decizie, notate x_j . variabilele de decizie sunt folosite pentru formularea modelului de programare liniară. Cu ajutorul variabilelor de decizie este descris atât obiectivul care trebuie atins, cât şi o serie de condiții restrictive care trebuie respectate de către soluția căutată.

Aşadar, o problemă de programare liniară îşi propune să **maximizeze** sau, după caz, **minimizeze** o **funcție obiectiv** în condițiile respectării unui **set de restricții**.

Funcția obiectiv este o funcție liniară de variabile x_j. Ea este reprezentarea matematică a scopului urmărit: nivelul profitului, costurile totale etc.

Setul de restricții este un sistem liniar de ecuații şi inecuații în variabilele x_j. El descrie condițiile pe care trebuie să le satisfacă variabilele de decizie pentru a fi în conformitate cu realitatea: capacități de producție limitate, nivel minim obligatoriu al vânzărilor etc.

Forma generală a unei probleme de programare liniară (PL)

O problemă de programare liniară nu n variabile de decizie $x_1, x_2, ..., x_n$ şi având m restricții are următoarea formă generală:

$$[1]\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \gtreqless b_2 \\ ..... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \gtreqless b_m \end{cases}$$ (**sistemul de restricții**).

[2] $\mathbf{x_1, x_2, ..., x_n \geq 0}$ (**condiții de nenegativitate**).

[3] **(min./max.)** $\mathbf{f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + .. + c_nx_n}$,

unde $\mathbf{\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n}$.

[PL]≡[1]⊕[2]⊕[3]

1.) **Forma matriceală**

Notăm: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}\in \mathbf{M_{(m,n)}(R)}$;

$\mathbf{X}\equiv {}^{t}\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_n \end{pmatrix}\in \mathbf{M_{(n,1)}(R)}$; $\bar{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{pmatrix}\in \mathbf{M_{(m,1)}(R)}$ şi

$\mathbf{C=(c_1, c_2, \ldots., c_n)\in M_{(1,n)}(R)}$.

Cu aceste notații problema de programare liniară poate fi scrisă sub forma: [1] $\mathbf{A\cdot X}\ \ \bar{b}$ [2] $\mathbf{X\geq O_{(n,1)}(R)}$; [3] **(min./max.)** $\mathbf{f(\bar{x})=C\cdot X}$, numită **forma matriceală** a problemei [P].

2.) **Forma vectorială**.

Notăm: $P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots. \\ a_{m1} \end{pmatrix}$; $P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots. \\ a_{m2} \end{pmatrix}$;...; $P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots. \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ şi $P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{pmatrix}$

Problema [P] poate fi scrisă sub forma:

[1] $\mathbf{x_1P_1+ x_2P_2+ \ldots.+ x_nP_n}\ \ P_0$;

[2] $\mathbf{X\geq O_{(n,1)}(R)}$;

[3] **(min./max.)** $\mathbf{f(\bar{x})=C\cdot X}$, numită **forma vectorială** a problemei [P].

3.) **Forma canonică**.

O problemă de programare liniară este sub **formă canonică** dacă ea se scrie:

[1] $\mathbf{A\cdot X\geq \bar{b}}$; [2] $\mathbf{X\geq O_{(n,1)}(R)}$; [3] **(min.)** $\mathbf{f(\bar{x})=C\cdot X}$, sau

[1] $\mathbf{A\cdot X\leq \bar{b}}$; [2] $\mathbf{X\geq O_{(n,1)}(R)}$; [3] **(max.)** $\mathbf{f(\bar{x})=C\cdot X}$.

4.) **Forma standard**.

O problemă de programare liniară este sub **forma standard**, dacă ea se scrie:

$$[P]\begin{cases} A\cdot X=\bar{b} \\ X\geq O_{(n,1)}(R) \\ (\min.)f(\bar{x})=C\cdot X \end{cases} \quad \textbf{sau} \quad [P]\begin{cases} x_1P_1+x_2P_2+....+x_nP_n=P_0 \\ X\geq O_{(n,1)}(R) \\ (\min.)f(\bar{x})=C\cdot X \end{cases}$$

Observație: Orice problemă de programare liniară poate fi adusă la forma standard dacă ținem seama de următoarele:

a) sensul unei inegalități se schimbă prin înmulțirea cu –1;

b) o inecuație de forma: $\mathbf{a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2+ ....+ a_{in}x_n \leq b_i}$, poate fi scrisă ca o ecuație: $\mathbf{a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2+ ....+ a_{in}x_n+ y_i=b_i}$, adăugând o nouă variabilă $\mathbf{y_i\geq 0}$, **numită variabilă ecart** sau **variabilă de compensare**.

O inecuație de forma: $\mathbf{a_{i1}x_1+ a_{12}x_2+ ....+ a_{in}x_n\geq b_i}$, poate fi scrisă ca o ecuație: $\mathbf{a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2+ ....+ a_{in}x_n- y_i=b_i}$, scăzând o variabilă de compensare $\mathbf{y_i\geq 0}$.

c) o ecuație poate fi scrisă ca două inecuații de sensuri contrare.

Modele economice care conduc la probleme de programare liniară.

1.) Problema transporturilor

Să presupunem că un anumit produs se află în **m** depozite $\mathbf{D_i, i=\overline{1,m}}$, în cantitățile $\mathbf{a_i}$. Acest produs trebuie transportat la **n** centre $\mathbf{C_j}$, fiind solicitat în cantitățile $\mathbf{b_j, j=\overline{1,n}}$.

Transportul unei unități de produs de la depozitul $\mathbf{D_i}$ la centru $\mathbf{C_j}$ costă $\mathbf{c_{ij}}$ unități băneşti.

Fie $\mathbf{x_{ij}}$ cantitatea de produs ce urmează a fi transportată de la depozitul $\mathbf{D_i}$ la centrul $\mathbf{C_j}$. Se pune problema realizării transportului astfel încât disponibilul de produs din fiecare depozit să fie epuizat, cererea să fie satisfăcută corect pentru fiecare centru, iar cheltuielile totale să fie **minime**.

Cantitatea de produs transportată de la depozitul $\mathbf{D_i}$ la cele n centre $\mathbf{C_j}$ va fi:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=x_{i1}+x_{i2}+....+x_{ij}+....+x_{in}=a_i\ ,$$

iar cantitate de produs transportată de la toate depozitele $\mathbf{D_i}$ la centrul $\mathbf{C_j}$ va fi:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=x_{1j}+x_{2j}+....+x_{ij}+....+x_{mj}=b_j$$

Dacă luăm în considerare toate depozitele şi toate centrele vom avea:

$$[4]\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i\ ,\ \ i=\overline{1,m}\ \text{şi}$$

[5] $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = \overline{1,n}$.

Condițiile de nenegativitate sunt: $x_{ij} \geq 0$; $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$.

Costul transportului este dat de funcția:

[6] $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, $\bar{x} = (x_{11}, x_{12}, ..., x_{ij}, ..., x_{mn})$ a cărei valoare se cere a fi **minimă**.

2.) Problema amestecului optim.

În urma unui studiu biologic întreprins asupra unor animale, s-a stabilit că rația zilnică a fiecărui animal crescut într-o fermă zootehnică trebuie să conțină n elemente nutritive $N_1, N_2, ..., N_n$ în cantitățile $b_1, b_2, ..., b_n$.

Ferma dispune de **m** tipuri de nutrețuri $A_1, A_2, ..., A_m$ pe care le procură la prețurile $c_1, c_2, ..., c_m$ unități bănești pe unitatea de produs. Analiza de laborator a conținutului în substanțe nutritive arată că o unitate din nutrețul A_j, $j = \overline{1,m}$ conține a_{ji} unități nutritive de tipul N_i, $i = \overline{1,n}$.

Se pune problema hrănirii raționale a animalelor, ceea ce înseamnă alcătuirea unor rații zilnice care să corespundă cerințelor biologice şi în acelaşi timp să existe o aprovizionare eficientă (**cu cheltuieli minime**).

Să notăm cu $x_1, x_2, ..., x_m$ cantitățile de nutreț din fiecare tip de nutreț $A_1, A_2, ..., A_m$ ce trebuie să facă parte din rația zilnică a unui animal.

Toate nutrețurile vor conține substanța i în cantitatea: $a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + ...+ a_{ji}x_j + ...+ a_{mi}x_m$, care, pentru o rație zilnică bine întocmită, trebuie să fie în cantitatea b_i.

Restricțiile problemei sunt:

$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}x_j = b_i$, $i = \overline{1,n}$, iar condițiile de nenegativitate: $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,m}$.

Fie c_j, $j = \overline{1,m}$ costul unei unități din nutrețul A_j.

Costul total al rației zilnice va fi:

$f(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_mx_m$, $\bar{x} = (x_1, x_2, .., x_j, .., x_m)$.

Aşadar **modelul matematic** al problemei este:

$$[P]\begin{cases}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}x_j = b_j,\ i=\overline{1,n} & \textbf{(restricțiile)}\\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,m} & \textbf{(condiții de nenegativitate)}\\ (\min)f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \textbf{(funcția obiectiv)}\end{cases}$$

3.) Folosirea optimă a produselor.

Un combinat de nutreţuri concentrate poate realiza **n** tipuri de nutreţuri $N_1, N_2, \ldots, N_n$, pentru care utilizează **m** tipuri de materie primă (**resurse**) $M_1, M_2, \ldots, M_m$, care sunt limitate de cantităţile b_i, $i=\overline{1,m}$.

Pentru producerea unei cantităţi de nutreţ N_j, $j=\overline{1,n}$ se consumă o cantitate a_{ij} din materia primă de tipul M_i, $i=\overline{1,m}$. La o unitate de nutreţ N_j se obţine un profit de c_j **u.b.** (**unităţi băneşti**). Din punct de vedere economic ne punem problema determinării cantităţilor din nutreţurile $N_1, N_2, \ldots, N_n$ ce urmează a fi produse astfel încât să se obţină un **profit maxim**. Fie x_j, $j=\overline{1,n}$, cantităţile de nutreţuri N_j ce urmează a fi realizate pentru a se obţine un profit maxim.

Pentru producerea cantităţii x_j din nutreţul N_j se consumă din materia primă M_i cantitatea $a_{ij}x_j$.

Cantitatea de materie primă M_i este limitată de b_i, deci trebuie impuse restricţiile: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$, $i=\overline{1,m}$.

Condiţiile de nenegativitate sunt: $x_j \geq 0$, $j=\overline{1,n}$.

Profitul total este dat de funcţia: $f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $\bar{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$ care trebuie să ia valoarea maximă.

3.2 Rezolvarea grafică a problemelor de programare liniară în două variabile

Cosiderăm următoarea problemă de programare liniară:

$$[1]\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \gtrless 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \gtrless 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots \\ a_nx+b_ny+c_n \gtrless 0 \end{cases}$$

[2] $x\geq 0;\ y\geq 0$

[3] **(min./max.)** $f(x.y)=c_1x+c_2y$

Pentru a determina soluția optimă a acestei probleme, trebuie, mai întâi, sa mulțimea soluțiilor sistemului [1]. Pentru rezolvarea acestui sistem se procedează astfel:

Se reprezintă, în sistemul ortogonal de axe de coordonate, dreptele:

(d_i): $a_ix+b_iy+c_i=0, \quad i=\overline{1,n}$,

fiecare dintre ele împărțind planul în câte două regiuni.

Soluția sistemului [1] va fi formată din toate punctele din plan ale căror coordonate îndeplinesc simultan inegalitățile din [1].

Intersecția poligonului convex determinat de restricțiile [1] cu primul cadran ($x\geq 0$; $y\geq 0$) reprezintă un poligon convex pe care îl vom numi **mulțimea programelor problemei notată PL**. Funcția obiectiv determină o familie de drepte paralele:

[3] (d_λ): $c_1x+c_2y=\lambda, \quad \lambda\in R$.

Dreptele familiei [3] se vor numi **linii de nivel**. Pentru coordonatele punctelor unei linii de nivel funcția obiectiv are aceeaşi valoare.

Linia de nivel (d_0) care trece prin origine $(\lambda=0)$ separă planul în două semiplane (P^+) şi (P^-).

Distanța de la origine la dreptele [3] este $d=\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$.

Fie **P** mulțimea programelor problemei.

Dacă $(d_0)\cap(P)=\phi$, **maximul** funcției obiectiv se obține pentru linia de nivel cea mai depărtată de origine care are cel puțin un punct comun cu **(P)**, iar **minimul** pentru cea mai apropiată linie de nivel de origine, care se bucură de aceeaşi proprietate.

Dacă (d_0) separă mulțimea **(P)** în două submulțimi, maximul, respectiv minimul se obține pentru cea mai depărtată linie de nivel din (P^+) sau (P^-).

Exemplul Utilizând metoda grafică să se determine:

$$\begin{cases} x-3y+3\geq 0 \\ 2x-y+2\geq 0 \\ 2x+y-4\geq 0 \\ x-y-1\leq 0 \end{cases}; \ (\min/\max) f(x,y)=x+\frac{1}{2}\cdot y$$

(d_1): x-3y+3=0; $P_1(x,y)$=x-3y+3
(d_2): 2x-y+2=0; $P_2(x,y)$=2x-y+2
(d_3): 2x+y-4=0; $P_3(x,y)$=2x+y-4.....
(d_4): x-y-1=0; $P_4(x,y)$=x-y-1
$P_1(0,0)=3>0$; $P_2(0,0)=2>0$; $P_3(0,0)=-4<0$ şi $P_4(0,0)=-1<0$.

$(d_3)\cap(d_4)\equiv\{A\} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$.....

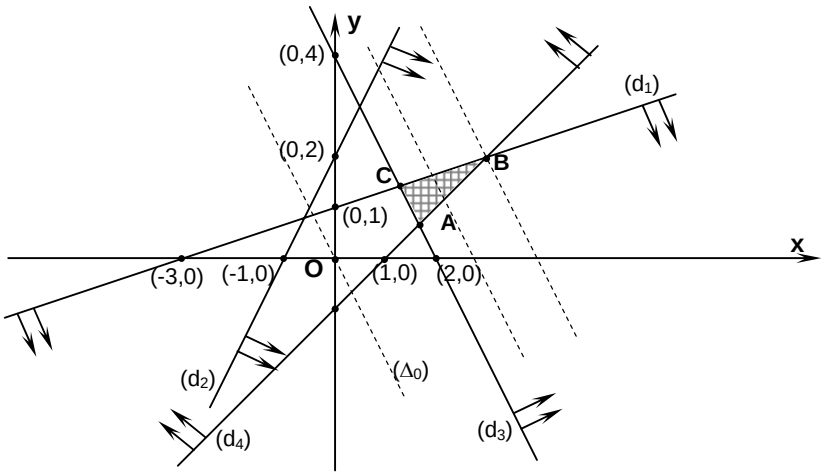
$(d_1)\cap(d_4)\equiv\{B\} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+3=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow B(3,2)$.....

$(d_1)\cap(d_3)\equiv\{C\} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+3=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{9}{7},\frac{10}{7}\right)$.....

Poligonul soluțiilor posibile este triunghiul ABC, haşurat pe figură.....

Notăm $f(x,y)=\lambda \Rightarrow \lambda=x+\frac{1}{2}y \Rightarrow (\Delta_\lambda)$: $2x+y-2\lambda=0$; (Δ_0): $2x+y=0$ .....

Observăm că toate dreptele familiei (Δ_λ) sunt paralele cu (d_3) şi deci, în punctele $A,C\in(d_3)$ vom avea pentru funcția obiectiv aceeaşi valoare.....



$f_{min}=f\left(\frac{9}{7},\frac{10}{7}\right)=f\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)=2$ şi $f_{max}=f(3,2)=4$ .....

3.3 Mulțimi convexe.

Fie spațiul liniar (vectorial) $\mathbf{R^n}$ şi $\mathbf{M \subset R^n}$, o submulțime nevidă a sa.

Definiția 3.3.1 Mulțimea $\mathbf{M \subset R^n}$ se numeşte ***<u>mulțime convexă</u>*** dacă $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in M$ şi $(\forall)\lambda \in [0,1]$, avem: $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in M$

Definiția 3.3.2 Un vector $\forall\, \bar{z} \in M$ se numeşte ***<u>punct de extrem</u>*** sau ***<u>vârf</u>*** al mulțimii convexe **M**, dacă nu există $\bar{x}, \bar{y} \in M$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ şi nu există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât:. $\bar{z} = \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}$.

Definiția 3.3.3 Numim ***<u>combinație liniară convexă</u>*** a vectorilor, $\bar{x_i} \in M, i = \overline{1,p}$, o expresie de forma: $\lambda_1 \overline{x_1} + \lambda_2 \overline{x_2} + ... + \lambda_p \overline{x_p}$, cu $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,p}$ şi $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p = 1$.

Observație: Se demonstrează că orice punct ce nu este punct de extrem se scrie ca o combinație liniară convexă de puncte extreme ale mulțimii convexe.

3.4 Soluții ale unei probleme de programare liniară

Fie o problemă de programare liniară aflată sub forma standard:

$$[PL]\begin{cases} A\cdot X=\bar{b} \\ X\geq O_{(n,1)}(R) \\ (\underline{\min})f(\bar{x})=C\cdot X \end{cases}$$

Presupunem că toate componentele vectorului coloană $\bar{b}$ sunt pozitive (în caz contrar, acest lucru se poate realiza prin înmulțirea cu –1 a ecuațiilor respective) și că rangul matricei A este m<n.

Definiția 3.4.1 Un vector $\bar{x}\in R^n$ ale cărui componente verifică sistemul de restricții [1] şi condițiile de nenegativitate [2] se numeşte ***soluție admisibilă*** a problemei [P].

Mulțimea soluțiilor admisibile problemei [P], notată cu S_a, est o mulțime convexă.

Definiția 3.4.2 O soluție admisibilă care are cel mult m componente strict pozitive, iar vectorii coloană ai matricei **A**, corespunzători acestor componente sunt liniari independenți, se numeşte ***soluție admisibilă de bază.***

Observație: Dacă soluția admisibilă de bază are **exact m** componente strict pozitive, spunem că ea este **nedegenerată**, iar dacă are mai puține o numim **degenerată**.

Exemplu :

Fie problema de programare liniară:

$$[PL]\begin{cases} [1]:\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=4 \\ 3x_1-x_2+6x_3+x_4=12 \end{cases} \\ [2]: x_j\geq 0,\ j=\overline{1,4} \\ [3]: (\underline{\min})f(\bar{x})=2x_1-x_2+2x_4,\ \ \bar{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4 \end{cases}$$

1.) $\bar{x}_a$**=(1, 1, 1, 4)** este o soluție **admisibilă** a problemei pentru că: x_1**=1,** x_2**=1,** x_3**=1,** x_4**=4**, verifică **[1]⊕[2]**.

2.) $\bar{x}_a$**=(0, 4, 0, 16)** este o soluție **admisibilă de bază, nedegenerată** pentru că: x_1**=0,** x_2**=4,** x_3**=0,** x_4**=16**, verifică **[1]⊕[2]**, are **exact** două componente

stric pozitive: $x_2>0$, $x_4>0$, rang $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 1 \end{pmatrix} = 2$ şi vectorii coloană din matricea **A**, corespunzători acestor coloane, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sunt liniari independenţi.

3.) $\bar{x}_a = (0, 0, 2, 0)$ este o soluţie **admisibilă de bază, degenerată** pentru că: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=0$, verifică **[1]⊕[2]**, are **o singură** componentă stric pozitivă, iar vectorul coloană corespunzător lui $x_3\neq 0$, $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, fiind nenul este liniar independent.

4.) $\bar{x}_a = (3, 0, 1/2, 0)$ este o soluţie admisibilă, dar **nu este admisibilă de bază** pentru că vectorii corespunzători coloanelor 1 şi 3 din matricea **A**, sunt liniar dependenţi **($P_3=2P_1$)**.

Observaţie: Orice soluţie admisibilă de bază $\bar{x}_a$ a unei probleme de programare liniară, este un punct de extrem al mulţimii soluţiilor admisibile S_a şi reciproc, orice punct de extrem al mulţimii soluţiilor admisibile este o soluţie de bază a problemei de programare.

Definiţia 3.4.3 O soluţie admisibilă se numeşte soluţie ***optimă*** a problemei **[PL]** dacă realizează minimul funcţiei obiectiv $f(\bar{x})$.

Vom nota cu $\bar{x}_0$, o soluţie optimă şi prin S_0, mulţimea soluţiilor optime.

Observaţie: S_0 este o mulţime convexă.

Dacă problema de programare liniară **[P]** are o soluţie optimă finită, atunci există un punct de extrem al mulţimii S_a în care funcţia obiectiv ia valoarea minimă sau maximă.

Soluţiile optime ale unei probleme de programare liniară trebuie căutate printre soluţiile admisibile de bază.

3.5. Metoda simplex. Algoritmul simplex primal.

Pentru o problemă de programare [PL] se porneşte de la o soluție admisibilă care este supusă unui **criteriu de optimalitate**. Dacă acest criteriu nu este satisfăcut se indică procedeul de construcție a unei alte soluții admisibile de bază pentru care funcția obiectiv ia o valoare mai mică.

După un număr finit de paşi se ajunge la soluția optimă, dacă aceasta există.

În metodă se indică şi situația în care în care problema nu are soluții sau nu are soluție finită.

Considerăm problema de programare liniară aflată sub forma standard:

$$[P]\begin{cases} \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{X}\geq \mathbf{O}_{(n,1)}(\mathbf{R}) \\ (\underline{\min})\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{X} \end{cases}$$

Presupunem că primele **m (m<n)** coloane ale matricei **A** formează matricea unitate de ordinul **m**. Dacă nu este aşa, prin transformări elementare putem realiza acest lucru. Astfel matricea extinsă a sistemului de restricții este:

$$\bar{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & .... & 0 & \alpha_{1m+1} & .... & \alpha_{1j} & .... & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & .... & 0 & \alpha_{2m+1} & .... & \alpha_{2j} & .... & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 & \alpha_{mm+1} & .... & \alpha_{mj} & .... & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right),$$

unde vectorii $\mathbf{P_1, P_2, ..., P_m}$ sunt dați de primele **m** coloane ale matricei **A** şi, fiind liniar independenți formează o bază în $\mathbf{R^m}$ (**bază canonică**). Oricare vector $\mathbf{P_j}$ ($\mathbf{j=\overline{1,n}}$) se exprimă în mod **unic** ca o combinație liniară de vectorii $\mathbf{P_i}$, $\mathbf{i=\overline{1,m}}$, prin:

$$P_j=\alpha_{1j}P_1+\alpha_{2j}P_2+\ldots.+\alpha_{mj}P_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}P_i\ .$$

Să notăm cu $\mathbf{C_b}$, vectorul linie format cu primele m componente ale vectorului **C**, componente ce corespund primelor m<n coloane ale matricei **A**.

Observație: Fie $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, respectiv $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, **vectorii linie** (respectiv **coloană**) din spațiul liniar $\mathbf{R^n}$.

Definim **produsul scalar** al celor doi vectori prin: $\bar{x}\cdot\bar{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n=X\cdot Y$.

Introducem notațiile:

$$z_j={}^tC_b\cdot P_j=c_1\cdot\alpha_{1j}+c_2\alpha_{2j}+\ldots+c_m\alpha_{mj},\ j=\overline{1,n},\ {}^tC_b=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix},\ P_j=\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \ldots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}.$$

Dacă β_i, $i=\overline{1,m}$ sunt pozitivi, atunci: $x_1=\beta_1, x_2=\beta_2, \ldots, x_m=\beta_m, x_{m+1}=x_{m+2}=\ldots=x_n=0$, este o soluție admisibilă de bază.

Criteriul de optimalitate.

Dacă diferențele z_j-c_j, $j=\overline{1,n}$ **nu** sunt pozitive (deci sunt zero sau negative), atunci problema de programare liniară [P] are un optim finit şi $\bar{x}_0=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ este soluția optimă căutată.

Observație: În problemele de programare în care se cere maximul funcției obiectiv, criteriul de optimalitate va cere ca: $z_j-c_j\geq 0$, $j=\overline{1,n}$.

În problema de minim, dacă există un indice $j=\overline{1,n}$ astfel încât $z_j-c_j>0$, atunci pot exista soluții admisibile de bază pentru care funcția obiectiv să ia o valoare mai mică decât pentru $\bar{x}_a$.

O nouă soluție de bază admisibilă se poate obține înlocuind un vector P_i din bază cu un vector P_j care nu face parte din bază.

Fie y_k $(k=1, 2, \ldots, i-1, j, i+1, \ldots, m)$, componenetele noii soluții de bază $\bar{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Criteriul de ieşire.

Dacă $\alpha_{ij}>0$, $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \le \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}$ $(\alpha_{kj}>0)$, atunci vectorul $\mathbf{P_i}$ din bază se înlocuieşte cu $\mathbf{P_j}$.

Criteriul de intrare.

Dacă $z_j-c_j \ge 0$, atunci vectorul $\mathbf{P_j}$, $j=\overline{m+1,n}$ intră în bază în locul vectorului $\mathbf{P_i}$, $i=\overline{1,m}$.

Observaţii:

1.) Întrucât diferenţele z_j-c_j pot fi nule pentru vectorii care nu fac parte din bază rezultă că problema de programare liniară **[P]** poate avea mai multe soluţii optime.

2.) Dacă $\beta_i=0$ rezultă că $\bar{y}$ este soluţia optimă chiar dacă $z_j-c_j>0$ (condiţiile $z_j-c_j \le 0$, sunt **suficiente** nu şi **necesare** pentru existenţa soluţiei optime.).

3.) Dacă $\alpha_{ij} \le 0$, $\beta_i>0$, $z_j-c_j \ge 0$, **nu** este posibil să obţinem o soluţie admisibilă de bază pentru care funcţia obiectiv să ia o valoare mai mică decât pentru $\bar{x}_a$.

Etapele algoritmului simplex primal.

I.) Se determină o soluţie admisibilă de bază.

II.) Se calculează diferenţele z_j-c_j, $j=\overline{1,n}$.

1.) Dacă $z_j-c_j \le 0$, $j=\overline{1,n}$ atunci după criteriul de optimalitate, soluţia admisibilă de bază $\bar{x}_a$ este optimă şi algoritmul se opreşte.

2.) Dacă există indici j pentru care $z_j-c_j \ge 0$, iar toate componentele vectorului $\mathbf{P_j}$ sunt mai mici sau egale cu zero ($\alpha_{ij} \le 0$), atunci problema are optim infinit şi algoritmul se opreşte.

3.) Dacă există indici j pentru care $z_j-c_j \ge 0$ şi nu toţi $\alpha_{ij} \le 0$, atunci se trece la etapa următoare.

III.) Se aplică **criteriul de intrare**, determinând vectorul $\mathbf{P_j}$ care intră în bază ca fiind acel vector pentru care $z_j-c_j=\max.(z_k-c_k)$, pentru acele diferenţe nenegative.

IV.) Se aplică **criteriul de ieşire**. Părăseşte baza vectorul $\mathbf{P_i}$ pentru care: $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \min_{\alpha_{kj}>0} \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}$.

V.) Se face schimbarea de bază obţinând o nouă soluţie admisibilă de bază $\bar{y}$ şi apoi etapele algoritmului se reiau. După un număr finit de paşi se găseşte soluţia optimă a problemei dacă aceasta există.

Datele unei probleme de programare liniară, cu notațiile deja făcute, le sintetizăm în următorul tabel:

B	C_b	P_0	c_1	c_2	...	c_i	...	c_m	...	c_j	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_i	...	P_m	...	P_j	...	P_n
P_1	c_1	β_1	1	0	...	0	...	0	...	α_{1j}	...	α_{1n}
P_2	c_2	β_2	0	1	...	0	...	0	...	α_{2j}	...	α_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	...	⋮	...	⋮
P_i	c_i	β_i	0	0	...	1	...	0	...	α_{ij}	...	α_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	...	⋮	...	⋮	...	⋮
P_m	c_m	β_m	0	0	...	0	...	1	...	α_{mj}	...	α_{mn}
z_j-c_j	—	$f(\overline{X})$	0	0	...	0	...	0	...	z_j-c_j	...	z_n-c_n

Observație: Dacă soluția admisibilă nu este optimă, adică există $z_j-c_j \geq 0$, alegem diferența z_j-c_j cea mai mare, determinând astfel vectorul P_j care intră în bază.

Dacă există mai multe astfel de diferențe egale poate intra în bază oricare dintre vectorii ce corespund acestora.

Dacă pe coloana lui P_j toate coordonatele $\alpha_{ij} \leq 0$, atunci problema admite optim infinit. Dacă pe coloana lui P_j există și $\alpha_{ij} > 0$, vectorul care părăsește baza se obține făcând rapoartele dintre componentele lui P_0 și componentele **strict pozitive** ale vectorului P_j, determinat anterior. Dacă $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ este cel mai mic raport, atunci P_i părăsește baza, fiind înlocuit cu vectorul P_j.

Exemplu 1:

Utilizând algoritmul simplex primal să se determine soluțiile optime ale problemei de programare liniară:

$$[P]\begin{cases}[1]:\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 60\\ 2x_1+x_2+3x_3\ge 10\\ x_2+2x_3\ge 20\end{cases}\\ [2]:\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\\ [3]:\ (\underline{\min}.)f(\bar{x})=5x_1-3x_2+4x_3,\ \ \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3\end{cases}$$

Forma **standard** a problemei este:

$$[1]:\begin{cases}x_1+x_2+x_3+y_1=60\\ 2x_1+x_2+3x_3-y_2=10\\ x_2+2x_3-y_3=20\end{cases};$$

[2]: $x_j\ge 0$, $y_j\ge 0$, $j=\overline{1,3}$;

[3]: $(\underline{\min.})\ f(\bar{x})=5x_1-3x_2+4x_3,\quad \bar{x}=(x_1, x_2, x_3)\in R^3$.

Utilizând transformări elementare asupra liniilor matricei extinse a sistemului de restricții, căutăm o soluție admisibilă de bază.

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&1&1&1&0&0&60\\ 2&(1)&3&0&-1&0&10\\ 0&1&2&0&0&-1&20\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_3-L_2]{L_1-L_2}\left(\begin{array}{cccccc|c}-1&0&-2&1&1&0&50\\ 2&(1)&3&0&-1&0&10\\ -2&0&-1&0&(1)&-1&10\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[L_2-L_3]{L_1-L_3}\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&-1&1&0&1&40\\ 0&1&2&0&0&-1&20\\ -2&0&-1&0&1&-1&10\end{array}\right)$$

$$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$$

$$x_1\ x_2\ x_3\ y_1\ y_2\ \ y_3$$

O soluție admisibilă de bază a problemei standard este:

$$\bar{x}_a=(0,\ \ 20,\ \ 0,\ \ 40,\ \ 10,\ \ 0)$$

Avem: $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$; $P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $P_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $P_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

$$\mathbf{P_6}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix};\ \mathbf{P_0}=\begin{pmatrix}\mathbf{40}\\ \mathbf{20}\\ \mathbf{10}\end{pmatrix}$$ şi **rang(A)=3**.

Tabelul simplex.

B(baza)	C_b	P_0	5	-3	4	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_4	0	40	1	0	-1	1	0	1
P_2	-3	20	0	1	2	0	0	-1
P_5	0	10	-2	0	-1	0	1	-1
z_j-c_j	—	-60	-5	0	-10	0	0	3
P_6	0	40	1	0	-1	1	0	1
P_2	-3	60	1	1	1	1	0	0
P_5	0	50	-1	0	-2	1	1	0
z_j-c_j	—	-180	-8	0	-7	-3	0	0

În prima etapă se observă că nu toate diferențele $\mathbf{z_j-c_j}$ sunt mai mici sau egale cu 0.

Cea mai mare diferență este 3 şi se află în dreptul vectorului $\mathbf{P_6}$, care va intra în bază. Cu componentele pozitive ale lui $\mathbf{P_6}$ avem un singur raport $\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}$ de considerat.

Acesta este 40/1. Aşadar va ieşi din bază vectorul $\mathbf{P_4}$, care va fi înlocuit de $\mathbf{P_6}$. Facem schimbarea de bază realizând, prin transformări elementare asupra liniilor matricei extinse $\overline{\mathbf{A}}$, pe coloana lui $\mathbf{P_6}$ prima coloană a matricei unitate $\mathbf{I_3}$.

Constatăm acum că toate diferențele $\mathbf{z_j-c_j}$ sunt mai mici sau egale cu zero.

Soluția optimă a problemei este:

$\mathbf{x_1=0,\ x_2=60,\ x_3=0}$ şi avem: (min.)$f \equiv f(0, 60, 0)=5\cdot0-3\cdot60+4\cdot0=-180$

Temă 1) Utilizând metoda grafică, să se rezolve urmatoarele probleme de programare liniară:

a) $\begin{cases} x+2y-7\le 0 \\ 2x+y-2\ge 0,\ f(x,y)=x+y \\ x-y\le 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 3 \le 0 \\ x - y - 3 \ge 0, \ f(x,y) = 2x - 3y \\ 2x - y \ge 0 \\ x - 2y \le 0 \end{cases}$

2) Utilizând metoda simplex primal sa se rezolve următoarele probleme de programare liniară:

a) $\begin{cases} [1]: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \ge 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge 4 \end{cases} \\ [2]: \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3} \\ [3]: (\underline{\min}.) f(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 + 2x_3, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} [1]: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 57 \end{cases} \\ [2]: \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3} \\ [3]: (\max.) f(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 + 5x_3, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \end{cases}$

CAPITOLUL IV

ELEMENTE DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR.

4.1. Eveniment. Probabilitate. Câmp de probabilitate

Noțiunile fundamentale ale teoriei probabilităților sunt cele de eveniment şi probabilitate. Evenimentul apare ca un fenomen care, în cadrul unei anumite experiențe, se poate produce sau nu. În teoria probabilităților interesează numai experiențele aleatoare.

Să considerăm ca exemplu experiența aruncării unui zar. Este evident vorba de o experiență aleatoare, adică o experiență al cărei rezultat variază la întâmplare.

Să notăm cu {1} apariția feței cu un singur punct, cu {2} apariția feței cu două puncte etc.

În urma unei aruncări obținem unul din rezultatele: {1}{2}{3}{4}{5}{6}.

Alte rezultate nu sunt posibile şi unul dintre ele se produce neapărat. Acestea sunt *probele* experienței efectuate.

Ne putem pune întrebarea dacă vom obține o față cu un număr par de puncte. În acest caz experiența este aruncarea zarului, proba este rezultatul care se obține la sfârşitul experienței, iar evenimentul aşteptat este apariția unui număr par de puncte. Evenimentul se realizează dacă se obține una din probele {2}, {4}, {6}, şi nu se realizează în caz contrar. Există deci, trei probe care realizează evenimentul.

Dacă în cadrul aceleaşi experiențe ne interesează apariția feței cu un punct, suntem în prezența unui eveniment care poate fi realizat de o singură probă, şi anume proba {1}. Evenimentul care poate fi realizat de o probă şi numai una se numeşte ***eveniment elementar***. Celelalte evenimente le numim ***compuse***.

Eveniment sigur. Eveniment imposibil

Fiecărei experienţe I se ataşează două evenimente cu character special: evenimentul sigur şi evenimentul imposibil.

Evenimentul sigur este acela care se realizează în orice probă şi **evenimentul imposibil** care nu se realizează în nici o probă. Evenimentul sigur îl vom nota cu **E** iar cel imposibil lui **ϕ**.

Evenimente contrare

Dacă notăm cu A evenimentul apariţiei uneia din feţele 1, 2, 3 la aruncarea unui zar şi cu B apariţia uneia din feţele 4, 5, 6, atunci observăm că atunci când A nu se realizează, se realizează B.

În acest caz vom spune că A şi B sunt **evenimente contrare**.

Întotdeauna, unui eveniment îi corespunde un eveniment contrar, a cărui realizare înseamnă prin definiţie, nerealizarea primului.

Evenimentul contrar lui A îl vom nota cu $\bar{A}$ sau cA. În acest caz sunt evidente relaţiile:

$$\bar{\bar{A}} = A, \bar{E} = \emptyset, \bar{\emptyset} = E.$$

Evenimente compatibile. Evenimente incompatibile

Evenimentele A şi B se numesc **compatibile** dacă se pot realize simultan, adică dacă există probe care realizează atât pe A cât şi pe B. În caz contrar, evenimentele sunt **incompatibile.**

Evenimentele contrare sunt incompatibile.

Operaţii cu evenimente

1.) **Reuniunea** evenimentelor A şi B este evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă se realizează cel puţin unul dintre evenimentele A sau B, şi se notează cu **A∪B**.

2.) **Intersecţia** evenimentelor A şi B este evenimentul care se realizează dacă şi numai dacă se realizează simultan cele două evenimente şi se notează cu **A∩B**.

3.) **Non A** este evenimentul a cărui realizare constă în nerealizarea evenimentului A şi se notează cu **Ā**, dacă ξ se subînţelege.

4.) **Diferența** evenimentelor A şi B notată cu **A\B**, este evenimentul care se realizează atunci când se realizează A dar nu se realizează B.

Avem: **A\B=** $A \cap \bar{B}$ şi $\bar{A}=\xi\backslash A$.

5.) **Implicația**. Vom spune că evenimentul A implică evenimentul B şi vom nota $A \subset B$ dacă atunci când se realizează evenimentul A se realizează în mod necesar şi evenimentul B.

Observație. Dacă avem simultan $A \subset B$ şi $B \subset A$ vom spune că evenimentele A şi B sunt echivalente şi vom nota aceasta prin $A \equiv B$.

Dacă oricărui eveniment îi ataşăm mulțimea cazurilor favorabile atunci operațiile dintre evenimente revin la operațiile respective dintre mulțimile corespunzătoare.

Observație. Evenimentele A şi B sunt incompatibile dacă $A \cap B = \phi$.

Dualitate de limbaj

Limbajul evenimentelor	Limbajul mulțimilor
Eveniment	Submulțimi ale lui E
Evenimentul sigur	Mulțimea totală E
Evenimentul imposibil	Mulțimea vidă ϕ
A implică B	$A \subset B$
A **sau** B	$A \cup B$
A **şi** B	$A \cap B$
Non A	$\bar{A}$
A şi B, incompatibile	$A \cap B = \phi$
Eveniment elementar	$e,\ e \in E$

Evenimentele A şi B sunt compatibile dacă $A \cap B \neq \phi$.

Fie ξ o mulțime finită de evenimente.

Definiția 4.1.1 Spunem că mulțimea de evenimente $K \subset P(E)$ constituie un ***câmp de evenimente*** dacă sunt verificate următoarele proprietăți:

1.) $(\forall)A \in K \Rightarrow \bar{A} \in K$;

2.) $(\forall)A,B \in K \Rightarrow A \cup B \in K$.

Observație. $A \cup \bar{A} \in K$, deci evenimentul sigur se găseşte în câmpul de evenimente.

Fiind contrarul evenimentului sigur rezultă că evenimentul imposibil ϕ aparține câmpului de evenimente.

Dacă $A,B \in K \Rightarrow A \cap B \in K$.

Probabilitate

Dacă într-o serie de **n** probe evenimentul **A** s-a realizat de $\mathbf{n_A}$ ori atunci numărul $f(A)=\frac{n_A}{n}$ se numeşte **frecvență relativă** a evenimentului **A**.

Menționăm următoarele proprietăți ale frecvenței relative:

1.) $0\le f(A)\le 1$, $(\forall)A\in P(\xi)$;

2.) $f(E)=1$;

3.) $f(\phi)=0$;

4.) $f(A\setminus B)=f(A)-f(B)$, dacă $B\subset A$;

5.) $f(A\setminus B)=f(A)-f(A\cap B)$;

6.) $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$;

7.) $f(\bar{A})=1-f(A)$;

8.) $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$, dacă $A\cap B=\phi$.

Noțiunea de frecvență relativă este suportul empiric al noțiunii de probabilitate.

A defini o probabilitate în raport cu o experiență, având un număr finit de cazuri posibile, înseamnă a asocia fiecărui eveniment **A**, legat de respectiva experiență un număr **P(A)** numit probabilitatea evenimentului **A**. Este natural să cerem ca P să aibă proprietățile frecvenței relative.

Definiția 4.1.2 Aplicația **P: P(E)→R** este o ***probabilitate*** dacă:

1.) $0\le P(A)\le 1$, $(\forall)A\in P(E)$;

2.) $P(E)=1$;

3.) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, dacă $A\cap B=\phi$, $(\forall)A,B\in P(E)$

Observație. $P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$ dacă evenimentele $A_k\in P(E)$, $k=\overline{1,n}$ sunt disjuncte două câte două. Dacă într-o probă toate evenimentele au aceeaşi probabilitate de a se realiza spunem că aceste evenimente sunt **echiprobabile**.

Pentru un eveniment **A** să notăm cu $\mathbf{n_f}$ numărul cazurilor favorabile şi cu $\mathbf{n_p}$ numărul cazurilor posibile. În acest caz avem: $P(A)=\frac{n_f}{n_p}$.

Exemplu 1.

Aruncarea unui zar „perfect” este o probă cu şase cazuri posibile echiprobabile. Apariția feței cu cinci sau şase puncte este evenimentul având probabilitatea $\mathbf{P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}}$.

Fiind dată mulțimea finită **E** şi aplicația **P:P(E)→R** satisfăcând 1.), 2.) şi 3.) din definiția 3, spunem că s-a dat un câmp finit de probabilitate.

Probabilități condiționate. Evenimente independente.

Presupunem că avem două urne:

$\mathbf{U_1:}\begin{cases}\mathbf{5a}\\ \mathbf{6n}\end{cases}$ (conține 5 bile albe şi 6 bile negre) şi $\mathbf{U_2:}\begin{cases}\mathbf{6a}\\ \mathbf{7n}\end{cases}$

Din una dintre urne se extrage o bilă (**nu ştim din care**)

Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

Nu putem răspunde la această întrebare fără informația suplimentară dacă extragerea s-a făcut din $\mathbf{U_1}$ sau $\mathbf{U_2}$.

Să considerăm evenimentele:

A: bila extrasă este albă;

B: bila extrasă este din U_1;

C: bila extrasă este din U_2.

Probabilitatea realizării evenimentului A este condiționată fie de evenimentul B, fie de evenimentul C, probabilități pe care le vom nota $\mathbf{P_B(A)}$ sau $\mathbf{P_C(A)}$ şi le vom numi **probabilități condiționate.**

$\mathbf{P_B(A)}$ este probabilitatea realizării evenimentului A, presupunând că evenimentul B s-a realizat.

Considerăm o experiență cu **n** cazuri posibile echiprobabile şi un eveniment B cu **m** cazuri favorabile. Dintre cele m cazuri favorabile evenimentului B, p sunt favorabile unui eveniment A.

Evident: $P(B)=\frac{m}{n}$ şi $P(A\cap B)=\frac{p}{n}$.

$$P_B(A)=\frac{p}{m}=\frac{p/n}{m/n}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Vom spune, în acest caz, că evenimentele A şi B sunt **dependente**.

Analog $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Definiția 4.1.3 Spunem că evenimentele A şi B sunt ***independente*** dacă: $\mathbf{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$.

Exemplul 2: Doi trăgători trag în aceeaşi țintă. Probabilitate ca primul să atingă ținta este 1/2, iar probabilitatea ca al doilea să atingă ținta este 2/3. Cei doi fac fiecare câte o incercare. Să se calculeze probabilitatea ca ținta sa fie atinsă de:

1) cel puțin unul din trăgători;
2) ambii trăgători;
3) primul trăgător.

Care este probabilitatea ca ținta să nu fie atinsă de nici un trăgător?

Rezolvare:

Se consideră evenimentele:

A: evenimentul ca primul trăgător să atingă ținta

B: evenimentul ca al doilea trăgător să atingă ținta

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \bullet P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \bullet \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

2) $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B) = \frac{1}{2} \bullet \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

3) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \bullet P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \bullet P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

4.2. Formule şi scheme clasice de probabilitate

Considerăm un câmp finit de probabilitate şi $\mathbf{A_k}$, $k=\overline{1,n}$, evenimente ale acestui câmp finit de probabilitate.

Definiția 4.2.1 O mulțime de evenimente $\mathbf{A_k}$, $k=\overline{1,n}$, care satisface:

1.) $A_k \neq \phi$, $k=\overline{1,n}$;

2.) $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$, $i, j=\overline{1,n}$;

3.) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$, se numeşte ***sistem complet de evenimente***.

Observație. Mulțimea tuturor evenimentelor elementare atașate unei experiențe formează un sistem complet de evenimente.

Aşadar, dacă $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{k=\overline{1,n}}$ formează un sistem complet de evenimente atunci:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = P(\xi) = 1.$$

Formule pentru calculul probabilităților

$$1.)\ P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$$

.

Pentru **k=3** obținem:

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Observație. Dacă evenimentele $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{k=\overline{1,n}}$ sunt **incompatibile** două câte două atunci: $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$, iar dacă sunt **independente**, atunci:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j) \cdot P(A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

2.) Dacă $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \neq 0$ atunci:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Observație. Dacă evenimentele $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{k=\overline{1,n}}$ nu sunt independente atunci: $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ....\cdot P(A_n)$.

3.) **P(A\B)=P(A)-P(A∩B)**, iar dacă **B⊂A**, atunci: **P(A\B)=P(A)-P(B)**.

Formula probabilității totale

Dacă $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{k=\overline{1,n}}$ este un sistem complet de evenimente şi B este un eveniment oarecare din acelaşi câmp de probabilitate, are loc formula probabilității totale:

$P(B)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(B)+P(A_2)\cdot P_{A_2}(B)+....+P(A_n)\cdot P_{A_n}(B)$.

Formula lui Bayes (formula ipotezelor).

În aceleaşi condiții are loc:

$$P_B(A_j) = \frac{P(A_j)\cdot P_{A_j}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}, (\forall)\ j=\overline{1,n}.$$

Această formulă se aplică în următoare situație: În urma unei experienţe poate apărea un eveniment B, dar acest eveniment apare ca efect a n evenimente $A_1, A_2, ..., A_n$, care formează un sistem complet de evenimente (B se realizează o dată cu unul şi numai unul dintre evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$).

Scheme clasice de probabilitate

1.Schema lui Bernoulli (schema binomială)

În urma efectuării unei experienţe se poate realiza evenimentul **A** cu probabilitatea p sau contrariul său $\bar{A}$ cu probabilitatea **q=1-p**. Repetăm experiența de n ori în condiții identice. Probabilitatea ca în cele n experienţe evenimentul A să se realizeze de k≤n ori este: $\mathbf{P(n;k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}}$ şi, deoarece acesta este coeficientul lui $\mathbf{x^k}$ din dezvoltarea binomului $\mathbf{(q+p\cdot x)^n}$, schema se mai numeşte şi schema binomială.

2. Schema lui Bernoulli cu mai multe stări.

Să presupunem că în urma unei experienţe se poate realiza unul şi numai unul dintre evenimentele $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{k=\overline{1,n}}$, care formează un sistem complet de evenimente.

Fie $\mathbf{p_k=P(A_k)}$, $\mathbf{k=\overline{1,p}}$. Evident $\sum_{k=1}^{p} p_k = 1$.

Se repetă experiența de n ori, în condiții identice. Probabilitatea **P(n; m_1, m_2, ….,m_p)** ca în cele n experiențe evenimentul A_k să se realizeze de m_k ori, $k = \overline{1,p}$ este: $P(n; m_1,m_2,..., m_p)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot....\cdot m_p!}\cdot p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot....\cdot p_p^{m_p}$,

unde $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$.

Observație. Schema este cunoscută şi sub denumirea de schema polinomială.

3. Schema lui Poisson.

Fie A_1, A_2, …., A_n **evenimente independente** având probabilitățile p_k, $k = \overline{1,n}$ de **a se realiza** în cadrul unei probe şi $q_k=1-p_k$, probabilitatea de **a nu se realiza** în cadrul aceleiaşi probe.

Probabilitatea de **a se realiza k** dintre cele n evenimente şi **a nu se realiza** (**n-k**) este coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului $P(x)=(p_1\cdot x+q_1)\cdot(p_2\cdot x+q_2)\cdot….\cdot(p_n\cdot x+q_n)$, unde: $p_k=P(A_k)$; $q_k=1-p_k$, pentru $k = \overline{1,n}$.

Observație. Schema lui Bernoulli este un caz particular al schemei lui Poisson, anume acela în cazul în care: $p_1=p_2=….=p_n=p$.

4. Schema bilei neîntoarse

Dintr-o urnă cu **a** bile albe şi **b** bile negre se extrag **n** bile ($n\le a+b$). Probabilitatea ca α bile extrase să fie albe şi β negre ($\alpha+\beta=n$), este :

$$P_{a,b}(\alpha,\beta)=\frac{C_a^{\alpha}\cdot C_b^{\beta}}{C_{a+b}^{n}}, \text{ unde: } C_i^j=\begin{cases}\dfrac{i!}{j!\cdot(i-j)!}, \text{ dacă } j<i\\ 1, \text{ dacă } i=j \text{ sau } j=0\\ 0, \text{ daca } j>i.\end{cases}$$

Observație. Justificarea denumirii acestei scheme constă în faptul că extragerea a n bile din urnă revine la a extrage de n ori a câte o bilă, fără a pune bila extrasă înapoi.

5. Schema hipergeometrică.

O urnă conține m_i bile de culoare c_i, cu $i = \overline{1,p}$. Se extrag, fără repunere **n** bile. Probabilitatea ca dintre cele **n** bile extrase, k_i să fie de culoarea c_i este:

$$P_{m_1.....m_p}^{k_1.....k_p}=\frac{C_{m_1}^{k_1}\cdot C_{m_2}^{k_2}\cdot....\cdot C_{m_p}^{k_p}}{C_{m_1+m_2+....+m_p}^{k_1+k_2+....+k_p}}, \text{ unde: } \sum_{i=1}^{p} k_i = n.$$

Exemplul 3: Se aruncă o monedă de 5 ori. Se cere probabilitatea de a obține de două ori stema.

Rezolvare: Vom aplica schema binomială; considerăm A evenimentul ca după 5 aruncări, să obținem de 2 ori stema.

$$p = \frac{1}{2}; q = \frac{1}{2}; n = 5; k = 2$$

$$P(A) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

Exemplul 4: Într-un atelier sunte trei maşini. Prima maşină da 1,5% rebuturi, a doua 1% şi a treia 0,9%. Dacă luăm la întâmplare o piesă de la fiecare maşină, care este probabilitatea ca două din piesele luate să fie bune şi una să fie rebut?

Rezolvare: Putem aplica schema lui Poisson. Probabilitatea cerută va fi coeficientul lui x^2 din dezvoltarea polinomului:

$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)(p_3x+q_3)$, unde

$p_1=0,985$, $p_2=0,99$, $p_3=0,009$

$q_1=0,015$ $q_2=0,01$, $q_3=0,991$

Exemplul 5 O urnă conține 30 bile numerotate cu 1,2,..., 30.se extrag simultan 10 bile. Care este probabilitatea sa obținem 5 dintre numerele: 2, 6, 14, 16, 21, 29?

Rezolvare: Se aplică schema bilei neîntoarse, având n=10, k=5,a=6(bilele din lista de mai sus), b=24.

Fie A evenimentul obținerii a 5 din numerele 2, 6, 14, 16, 21, 29.

$$P(A) = \frac{C_6^5 \cdot C_{24}^1}{C_{30}^{10}}$$

Temă 1.Se aruncă de 10 ori o monedă. Care este probabilitatea de a obține de 3 ori stema? Dar probabbilitatea de a obține de cel putin trei ori stema?

2.Se consideră patru urne cu compozițiile:

$$U_1: \begin{cases} 3 \text{ bile albe} \\ 6 \text{ bile negre} \end{cases}, \quad U_2: \begin{cases} 5 \text{ bile albe} \\ 4 \text{ bile negre} \end{cases},$$

$$U_3: \begin{cases} 4 \text{ bile albe} \\ 4 \text{ bile negre} \end{cases}, \quad U_1: \begin{cases} 4 \text{ bile albe} \\ 3 \text{ bile negre} \end{cases}$$

Din fiecare urnă se extrag câte trei bile, punându-se după fiecare extragere bila înapoi în urnă. Care este probabilitatea ca din două urne să obținem combinația 2 bile albe şi o bila neagră, iar din celelalte să obținem altă combinație?

3.Un joc cu 32 de cărți conține 8 cupe şi 4 aşi, din care un as de cupă. Cele 32 de cărți au probabilități egale de a fi extrase. Se trag simunltan 5 cărți din cele 32 şi fie A şi B definite astfel:

A: se extrag exact 3 aşi;

B: se extrag exact 3 cupe.

a) Să se calculeze probabilitatea fiecăruia din aceste evenimente.

b) Să se definească evenimentul $C = A \cap B$ şi să i se calculeze probabilitatea.

c) Să se definească evenimentul $D = A \cup B$ şi să i se calculeze probabilitatea.

4.3. Variabile aleatoare

Noțiuni introductive

Fie $S=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, un sistem complet de evenimente ale unui câmp finit de probabilitate. Evenimentele A_i, $i=\overline{1,n}$ sunt elementare şi într-o experiență (probă)se poate realiza doar unul singur.

Avem evident: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E$, $A_i \cap A_j = \phi$, pentru $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$ şi notând cu $p_i = P(A_i)$, probabilitatea realizării evenimentului A_i rezultă $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Definiția 4.3.1 Se numeşte ***variabilă aleatoare*** (întâmplătoare, statistică) o funcție reală **X** definită pe un sistem complet de evenimente **S**, adică $X: S \to R$.

Valoarea variabilei aleatoare **X** corespunzătoare evenimentului $A_i \in S$ se va nota $X(Ai)=xi \in R$.

Deoarece probabilitatea de realizare a evenimentului A_i este p_i vom spune că p_i este probabilitatea ca variabila aleatoare **X** să ia valoarea x_i.

Pe scurt vom spune că are loc evenimentul $X=x_i$ cu probabilitatea $p_i=P(X=x_i)$.

O variabilă aleatoare se va numi **discretă**, dacă ea este definită pe o mulțime cel mult numărabilă de evenimente.

Fie **X** o variabilă aleatoare discretă.

Definiția 4.3.2. Ansamblul format din valorile variabilei aleatoare **X**, şi probabilitățile evenimentelor corespunzătoare se numeşte ***distribuția (repartiția)*** variabilei aleatoare **X** şi se notează:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \text{ sau } X: \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \; i=\overline{1.n} \text{ cu } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

***Exemplu 1*.**

Într-o urnă sunt şase bile albe şi patru bile negre. Extragem o bilă şi considerăm evenimentele:

A: extragerea unei bile albe;

B: extragerea unei bile negre;

Evident: $\mathbf{B=\overline{A}}$ iar $\mathbf{S=\{A,B\}}$ este un sistem complet de evenimente deoarece $\mathbf{A\cup B=E}$ şi $\mathbf{A\cap B=\phi}$. $\mathbf{P(A)=0,6}$ iar $\mathbf{P(B)=0,4}$.

Definim variabila aleatoare **X** care ia valoarea $\mathbf{x_1=1}$ sau valoarea $\mathbf{x_2=0}$ după cum se realizează **A** sau **B**.

Distribuția variabilei aleatoare **X** este $X:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.

Distribuția unei variabile aleatoare **X** poate fi reprezentată grafic, în plan, prin **poligonul de repartiție**, care se obține unind printr-o linie poligonală punctele de coordonate $\mathbf{(x_i, p_i)}$, $i=\overline{1,n}$.

În general pe cele două axe se iau unități de măsură diferite.

Distribuții clasice

1.) Distribuția binomială. (corespunzătoare schemei lui Bernoulli).

Se ataşează schemei lui Bernoulli variabila aleatoare **X** care reprezintă numărul de realizări ale evenimentului **A** atunci când se efectuează n probe; **X** având următorul tablou de repartiții:

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & .... & i & .... & n\\ q^n & C_n^1\cdot p\cdot q^{n-1} & C_n^2\cdot p^2\cdot q^{n-2} & .... & C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i} & .... & p^n\end{pmatrix}$$

, unde: p=P(A), q=1-p, $\sum_{i=0}^{n} C_n^i\cdot p^i\cdot q^{n-i}=(p+q)^n=1.$

2.) Distribuția polinomială. (corespunzătoare schemei lui Poisson).

Se ataşează schemei lui Poisson variabila aleatoare **X** care reprezintă numărul de apariții (realizări) ale evenimentului $\mathbf{A_i}$, atunci când se efectuează **n** experiențe; **X** având următorul tablou de repartiție:

$\mathbf{X:\begin{pmatrix}0 & 1 & .... & i & .... & n\\ p_0 & p_1 & .... & p_i & .... & p_n\end{pmatrix}}$, în care $\mathbf{p_i}$ este coeficientul $\mathbf{x^i}$, $\mathbf{i=\overline{0,n}}$, din dezvoltarea polinomului: $\mathbf{P(x)=(p_1\cdot x+q_1)\cdot(p_2\cdot x+q_2)\cdot...\cdot(p_i\cdot x+q_i)\cdot...\cdot(p_n\cdot x+q_n)}$,

unde: $\mathbf{p_i=P(A_i)}$, $\mathbf{q_i=1-p_i}$, $\sum_{i=0}^{n} p_i=1.$

3.) Distribuția corespunzătoare schemei bilei neîntoarse.

Se ataşează schemei bilei neîntoarse variabila aleatoare **X** care reprezintă numărul de bile albe dintre cele n bile extrase din urnă; **X** având următorul tablou de distribuție:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & .... & i & .... & n \\ \dfrac{C_a^0\cdot C_b^n}{C_{a+b}^n} & ..... & \dfrac{C_a^i\cdot C_b^{n-i}}{C_{a+b}^n} & ..... & \dfrac{C_a^n\cdot C_b^0}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix} \text{ unde}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{C_a^i\cdot C_b^{n-i}}{C_{a+b}^n}=1.$$

Fie variabilele aleatoare **X** şi **Y** cu tablourile de distribuție:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & .... & x_i & .... & x_n \\ p_1 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix},\ Y:\begin{pmatrix} y_1 & .... & y_i & .... & y_n \\ q_1 & .... & q_j & .... & q_m \end{pmatrix}, \text{ unde, în}$$

general, $\mathbf{q_k\neq 1-p_k,\ 1\le k\le \min\{n,m\}}$.

Definiția 4.3.3. Spunem că variabilele aleatoare **X** şi **Y** sunt ***independente*** dacă:

$\mathbf{P[(X=x_i)\wedge(Y=y_j)]=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)=p_i\cdot q_j,\ i=\overline{1,n}}$ şi $\mathbf{j=\overline{1,m}}$.

Observație. Această noțiune se poate extinde la orice număr finit de variabile aleatoare.

Operații cu variabile aleatoare

În continuare vom presupune că toate variabilele aleatoare la care ne vom referi sunt ataşate aceleiaşi experiențe, adică toate variabilele aleatoare sunt definite pe aceeaşi mulțime de evenimente elementare.

Menționăm că o constantă **a** poate fi interpretată ca o variabilă aleatoare definită pe orice mulțime de evenimente elementare şi anume ca variabila aleatoare care ia valoarea **a** pentru orice eveniment elementar, prin urmare tabloul de distribuție al constantei **a**, interpretată ca variabilă aleatoare, este: $a:\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Din acest motiv se pot efectua totdeauna operații cu variabile aleatoare şi constante, interpretate ca variabile aleatoare iar variabilele aleatoare **X** şi constantele **a** sunt, în acest sens, independente.

Fie variabilele aleatoare: $X:\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, $i=\overline{1,n}$ şi $Y:\begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}$, $j=\overline{1,m}$.

1.) Adunarea variabilelor aleatoare.

Suma variabilelor aleatoare **X** şi **Y** este o nouă variabilă aleatoare, notată **X+Y**, ce are tabloul de distribuție:

$$X+Y:\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & .... & x_i+y_j & .... & x_n+y_m \\ p_{11} & p_{12} & .... & p_{ij} & .... & p_{nm} \end{pmatrix}, \text{ unde}$$

$p_{ij}=P(X+Y=x_i+y_j)=P[(X=x_i)\wedge(Y=y_j)]$, iar $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1.$

Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, atunci: $\mathbf{p_{ij}=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)=p_i\cdot q_j}$, iar dacă nu sunt independente atunci: $\mathbf{p_{ij}=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j/X=x_i)=P(Y=y_j)\cdot P(X=x_i/Y=y_j)}$, unde prin $\mathbf{P(X=x_i/Y=y_j)}$ înțelegem probabilitatea ca variabila aleatoare **X** să ia valoarea $\mathbf{x_i}$ condiționată de faptul că variabila aleatoare **Y** are valoarea $\mathbf{y_j}$.

Suma dintre o variabilă aleatoare X şi o constantă a este o nouă variabilă aleatoare, notată **X+a**, având tabloul de distribuție

$$\mathbf{X+a:\begin{pmatrix} x_1+a & x_2+a & .... & x_i+a & .... & x_n+a \\ p_1 & p_2 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix}}, \text{ deoarece}$$

$\mathbf{P(X+a=x_i+a)=P[(X=x_i)\wedge(a=a)]=P[(X=x_i)\cdot P(a=a)]=p_i.}$

2.) Înmulțirea variabilelor aleatoare.

Produsul variabilelor aleatoare **X** şi **Y** este o nouă variabilă aleatoare, notată **X·Y**,având tabloul de distribuție:

$$X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & .... & x_iy_j & .... & x_ny_m \\ p_{11} & p_{12} & .... & p_{ij} & .... & p_{nm} \end{pmatrix}, \text{ unde}$$

$\mathbf{p_{ij}=P(X\cdot Y=x_i\cdot y_j)=P[(X=x_i)\wedge(Y=y_j)]}$.

Dacă variabilele aleatoare **X** şi **Y** sunt independente atunci $\mathbf{p_{ij}=p_i\cdot q_j}$, iar dacă nu sunt independente atunci: $\mathbf{p_{ij}=p_iP(Y=y_j/X=x_i)=q_j\cdot P(X=x_i/Y=y_j)}$.

În cazul particular **Y=a** (a=const.) se obține produsul dintre variabila aleatoare **X** şi constanta **a**, având tabloul de distribuție:

$$aX:\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & .... & ax_i & .... & ax_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix}, \text{ deoarece}$$

$P(aX=ax_i)=P[(a=a) \wedge (X=x_i)]=P(X=x_i)=p_i$.

Operațiile de sumă şi produs se pot extinde la orice număr finit de variabile aleatoare.

3.) Puterea unei variabile aleatoare.

Fiind dată o variabilă aleatoare **X**, prin $\mathbf{X^k}$ **($k \in N^*$)** vom înțelege o nouă variabilă aleatoare, având tabloul de distribuție:

$$X^k : \begin{pmatrix} x_1^k & x_2^k & .... & x_i^k & .... & x_n^k \\ p_1 & p_2 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix}$$, deoarece: $P(X^k=x^k_i)=P(X=x_i)=p_i$.

4.) Inversa unei variabile aleatoare cu valori nenule.

Dacă variabila aleatoare **X** ia numai valori nenule, $x_i \neq 0$, $i=\overline{1,n}$, atunci **inversa variabilei aleatoare X** este variabila aleatoare$\mathbf{X^{-1}}$ cu tabloul de distribuție:

$$X^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & .... & \frac{1}{x_i} & .... & \frac{1}{x_n} \\ p_1 & p_2 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix}.$$

5.) Câtul a două variabile aleatoare.

Dacă variabila aleatoare **Y** admite inversa $\mathbf{Y^{-1}}$, atunci, prin definiție, câtul $\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1}$, deci:

$$\frac{X}{Y} : \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_1}{y_2} & .... & \frac{x_i}{y_j} & .... & \frac{x_n}{y_m} \\ p_{11} & p_{12} & .... & p_{ij} & .... & p_{nm} \end{pmatrix}$$, unde

$$p_{ij}=P\left(\frac{X}{Y}=\frac{x_i}{y_j}\right)=P[(X=x_i) \wedge (Y=y_j)].$$

Valori tipice ale unei variabile aleatoare.

Fie **X** o variabilă aleatoarea vând tabloul de distribuție:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_i & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix}$$

Definiția 4.3.4 Se numeşte ***valoare medie (speranță matematică)*** a variabilei aleatoare **X** numărul real:

$$\mathbf{M(X)} \overset{\text{not}}{=} \bar{x} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ .$$

Observaţie. Valoare medie a unei variabile aleatoare **X** este media ponderată a valorilor sale cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Într-adevăr cum **S** este un sistem complet de evenimente, avem: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ şi deci:

$$M(X) = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Menționăm următoarele proprietăți pentru valoarea medie a unei variabile aleatoare **X**:

P_1) M(a)=a, a=const.;

P_2) M(aX)=a·M(X);

P_3) M(X+Y)=M(X)+M(Y);

P_4) M(a+X)=a+ M(X), a=const.;

P_5) M(X·Y)=M(X)·M(Y), dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente.

Observaţie. Media unei variabile aleatoare este valoarea în jurul căreia se grupează valorile variabilei aleatoare **X**.

Proprietățile P_3) şi P_5) se pot extinde la orice număr finit de variabile aleatoare.

Valoarea medie a unei variabile aleatoare discrete **X** satisface dubla inegalitate:

$$x_\alpha \le \bar{x} \le x_\beta, \text{ unde: } x_\alpha = \min_{1\le i\le n}\{x_i\} \text{ şi } x_\beta = \max_{1\le i\le n}\{x_i\}.$$

Fie acum $\bar{x} = \mathbf{M(X)}$, valoarea medie a variabilei aleatoare **X** şi $u_i = x_i - \bar{x}$, $i = \overline{1,n}$, abaterea valorii x_i de la valoarea $\bar{x}$.

Definiția 4.3.5 Dată o variabilă aleatoare **X**, definită pe un sistem complet **S** de evenimente, se numeşte ***abaterea variabilei aleatoare X de la valoarea medie***, o nouă variabilă aleatoare $\mathbf{U = X - \bar{x}}$, definită peste aceleaşi sistem **S** şi care ia valorile $\mathbf{u_i = x_i - \bar{x}}$ cu aceleaşi probabilităţi $\mathbf{p_i}$, $\mathbf{i = \overline{1,n}}$.

Tabloul de distribuție al acesteia este:

$$U:\begin{pmatrix} x_1-\bar{x} & x_2-\bar{x} & .... & x_i-\bar{x} & .... & x_n-\bar{x} \\ p_1 & p_2 & .... & p_i & .... & p_n \end{pmatrix}$$

Observație. Probabilitatea ca variabila **U** să ia valoarea $\mathbf{u_i}$ este egală cu probabilitatea ca variabila **X** să ia valoarea $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{i = \overline{1,n}}$.

Dacă se cunoaşte distribuția variabilei aleatoare **X** atunci abaterea ei **U** este complet determinată.

Valoarea medie a abaterii este zero.

Într-adevăr: $\mathbf{M(U)=M(X-\bar{x})=M(X)-\bar{x}=0}$.

Definiția 4.3.6 Numim ***moment inițial de ordinul k*** al variabilei aleatoare **X**, valoarea medie a variabilei aleatoare $\mathbf{X^k}$, adică numărul:

$$\mathbf{M_k(X)=M(X^k)=}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i = p_1x_1^k + p_2x_2^k + ... + p_nx_n^k .$$

În particular, momentul inițial de ordinul întâi este chiar valoarea medie a variabilei aleatoare **X**, adică: $\mathbf{M_1(X)=M(X)}$.

Definiția 4.3.7 Numim ***valoarea medie de ordinul k*** a variabilei aleatoare **X**, numărul real notat $\mathbf{M_k}$ şi dat de: $\mathbf{M_k=[M(X^k)]^{1/k}=(p_1x^k{}_1+ p_2x^k{}_2+ ....+ p_nx^k{}_n)^{1/k}}$.

Prin **valoare medie pătratică** a variabilei aleatoare **X** vom înțelege valoarea medie de ordinul al doilea al acesteia, adică numărul real:

$$M_2 = \sqrt{p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2} .$$

Definiția 4.3.8 Se numește ***moment centrat de ordinul k*** al variabilei aleatoare **X**, momentul de ordinul k al abaterii sale, adică numărul real:

$$M(U^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i^k \ , \ u_i = x_i - \bar{x} \ , \ i = \overline{1,n} .$$

Definiția 4.3.9 Numim ***dispersie*** a variabilei aleatoare **X** momentul centrat de ordinul al doilea al variabilei aleatoare **X**, adică numărul real notat $\mathbf{D^2(X)}$ şi dat de: $D^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i^2$.

Menționăm următoarele proprietăți pentru dispersia unei variabile aleatoare X:

P_1) $D^2(a)=0$, a=const.;

P_2) $D^2(aX)=a^2D^2(X)$;

P_3) $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)$, dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente.

P_4) $D^2(X+a)=D^2(X)$;

P_5) $D^2(X-Y)=D^2(X)+D^2(Y)$, unde X-Y=X+(-1)Y iar variabilele X şi Y sunt independente.

P_6) $D^2(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, care se obțin din P_2), considerând variabila aleatoare: $(X-\bar{x})^2$ şi folosind proprietățile valorii medii.

Definiția 4.3.10 Numim **abatere medie pătratică** a variabilei aleatoare **X**, numărul $\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{p_1u_1^2 + ... + p_nu_n^2}$.

Observație. Dispersia unei variabilei aleatoare **X** măsoară gradul de împrăştiere a valorilor variabilei aleatoare **X** față de valoarea medie a acesteia.

Definiția 4.3.11 Prin ***abatere absolută*** a variabilei aleatoare **X** înțelegem variabila aleatoare notată $|X-\bar{x}|$, având repartiția:

$$|X-\bar{x}|:\begin{pmatrix} |x_1-\bar{x}| & |x_2-\bar{x}| & .... & |x_n-\bar{x}| \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2 Fie X şi Y două variabile aleatoare cu repartiţiile

$$X:\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ şi } Y:\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine repartiţiile următoarelor variabile aleatoare: X+5, 4X, X^2, X+Y,XY.

b) Să se calculeze M(X) şi $D^2(X)$.

Rezolvare:

a) $X+5:\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$; $4X:\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$; $X^2:\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$$X+Y:\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 2 & 5 & 8 \\ 0,04 & 0,1 & 0,06 & 0,16 & 0,4 & 0,24 \end{pmatrix}$$

$$XY:\begin{pmatrix} 2 & -2 & -10 & -3 & 6 & 15 \\ 0,04 & 0,1 & 0,06 & 0,16 & 0,4 & 0,24 \end{pmatrix}$$

$$M(X)=(-2)\cdot 0,2+3\cdot 0,8=2$$

$$M(X)=4\cdot 0,2+9\cdot 0,8=8$$

$$D^2(X)=M(X^2)-(M(X))^2=8-4=4$$

Temă

1) Se consideră variabilele aleatoare independente

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ şi } Y:\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine repartiţiile următoarelor variabile aleatoare: X+3, 2X, X^2, 2X+4Y,XY.

b) Să se calculeze M(X) şi $D^2(3X-Y)$.

2) Într-o urnă sunt 2 bile albe şi 4 bile negre. Efectuăm 3 extrageri a câte o bilă, punând de fiecare dată bila extrasă înapoi în urnă. Atunci numărul de apariţii de bile albe este o variabilă aleatoare. Să se determine distribuţia acestei variabile aleatoare.

3) Fie X o variabilă aleatoare cu media m şi dispersia σ^2. Să se calculeze media şi dispersia variabilei $Y=\dfrac{X-m}{\sigma}$.

CAPITOLUL V

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ

5.1. Noțiuni de bază ale statisticii matematice

Statistica matematică se ocupă cu gruparea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen, precum şi cu unele previziuni privind producerea lui viitoare.

În cadrul analizei statistice a unui fenomen acționează mai întâi **statistica descriptivă**, care se ocupă cu culegerea datelor asupra fenomenului respectiv şi cu înregistrarea acestor date, apoi intervine **statistica matematică**, care grupează datele, le analizează şi le interpretează în vederea unor predicții privind viitorul fenomenului.

Definiția 5.1.1 Prin ***populație statistică*** se înțelege orice mulțime definită de obiecte de aceeaşi natură. Elementele unei populeții se numesc ***unități statistice*** sau ***indivizi***. Numărul de elemente care constituie populația se numeşte ***volumu***l populației.

Se numeşte ***caracteristică*** (sau ***variabilă statistică***) a populației trasătura comună tuturor indivizilor populației

Analiza statistică se poate face după una sau mai multe caracteristici.

Caracteristică poate fi **cantitativă** dacă se poate măsura (vârstă, talie, greutate, lungimea firului de păr, etc.). **calitativă** sau în caz contrar (culoarea părului, culoare ochilor, sexul, profesia, etc.).

Caracteristicile cantitative care pot lua numai valori întregi se numesc **discrete** sau **discontinue**.

O caracteristică ce poate lua orice valoare dintr-un interval finit sau infinit se numeşte **continuă**.

Definiția 5.1.2.În cazul populațiilor cu un număr mare de indivizi se efectuează o statistică numai pentru o fracțiune din populația totală, iar rezultatul obținut se extinde pentru toată populația. Fracțiunea din populația totală pe care se face statistica se numeşte ***eşantion.***

Gruparea datelor

Analiza statistică a unui fenomen, în raport cu o singură caracteristică ne conduce la o serie de perechi de valori, care se va numi **serie statistică.** Primul număr al perechii reprezintă valoarea caracteristicii, cel de-al doilea număr reprezentând numărul de unități statistice corespunzătoare acelei valori a caracteristicii.

Să considerăm o populație **P** şi o caracteristică cantitativă, sau o variabilă, **f**.

Caracteristica **f** asociază fiecărui individ **x** din populație o valoare **f(x)**, determinată în general prin măsurători empirice.

Mulțimea: **{(x, f(x))/x∈P}** se numeşte serie statistică**.**

Definiția 5.1.3 Numim ***frecvență absolută*** a valorii reale **a**, numărul indivizilor din mulțimea: **{x/x∈P, f(x)=a}**.

Frecvența absolută a valorii a se va nota prin $\mathbf{n_a}$.

Fie **N**, numărul tuturor indivizilor populației statistice **P**.

Definiția 5.1.4 Numim ***frecvență relativă*** a valorii a numărul $f_a = \frac{n_a}{N}$.

Definiția 5.1.5 Numim ***frecvență absolută cumulată crescător*** a valorii **a**, numărul indivizilor din mulțimea: **{x/x∈P, f(x)≤a}**.

Vom nota această frecvență cu $\mathbf{n_a}\uparrow$.

Definiția 5.1.6 Numim ***frecvență absolută cumulată descrescător*** a valorii **a**, numărul indivizilor din mulțimea: **{x/x∈P/f(x)≥a}**. Această frecvență se va nota cu $\mathbf{n_a}\downarrow$.

Observație. Schimbând cuvântul „absolut” cu „relativ” se definesc frecvențele relative cumulate crescător şi descrescător, date de: $f_a\uparrow = \frac{n_a\uparrow}{N}$ respectiv $f_a\downarrow = \frac{n_a\downarrow}{N}$.

Definiția 5.1.7 Pentru intervalul $\mathbf{[a_i, a_{i+1})}$, $\mathbf{i = \overline{0,n}}$, numărul indivizilor din mulțimea $\mathbf{\{x/x\in P, a_i\le f(x)<a_{i+1}\}}$ se numeşte ***frecvența absolută a intervalului*** $[a_i, a_{i+1})$ şi se notează cu $\mathbf{n_{i,\,i+1}}$.

Definiția 5.1.8 Numărul $f_{i,i+1} = \frac{n_{i,i+1}}{N}$ se numeşte ***frecvența relativă a intervalului*** $[a_i, a_{i+1})$.

Pentru intervalele $\mathbf{[a_i, a_{i+1})}$ se pot de asemenea defini frecvențele absolute cumulate şi relative cumulate, în mod corespunzător ținând seama de **definiția 5.1.5, definiția 5.1.6** şi observația imediată acestora.

Exemplu 1.

Numărul purceilor născuți la o fătare este dat în tabelul de mai jos:

Nr. purcei	Frecv. absolută.	Frecv. relativă	Frecv.abs. .cum.crescr.	Frecv.abs.. cum.descrescr	Frecv.rel.. cum.crescr.	Frecv.rel.. cum.descrescr
1	1	0,02	1	50	0,02	1
2	1	0,02	2	49	0,04	0,98
3	2	0,04	4	47	0,08	0,94
4	4	0,08	8	43	0,16	0,86
5	6	0,12	14	37	0,28	0,74
6	7	0,14	21	30	0,42	0,60
7	6	0,12	27	24	0,54	0,48
8	7	0,14	34	17	0,68	0,34
9	9	0,18	43	8	0,86	0,16
10	7	0,14	50	1	1	0,02

5.2. Reprezentarea grafică a seriilor statistice

În cele ce urmează ne vom referi la reprezentarea grafică a seriilor statistice cu o singură caracteristică.

Reprezentarea grafică a seriilor statistice este uneori foarte sugestivă, ea contribuind la o primă interpretare intuitivă, pe cale vizuală, a datelor. Deseori reprezentarea grafică sugerează însăşi legea pe care o urmează fenomenul studiat.

Graficul corespunzător unei serii statistice se numeşte **diagramă**.

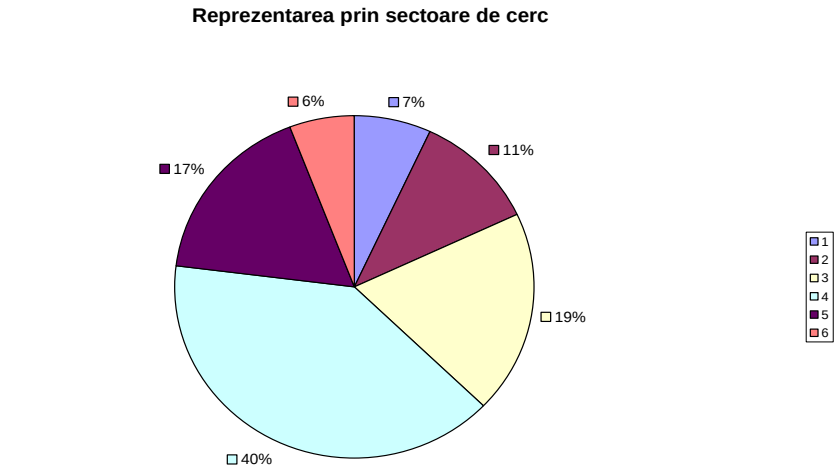
1.) Reprezentarea prin **dreptunghiuri** sau **cercuri de structură**.

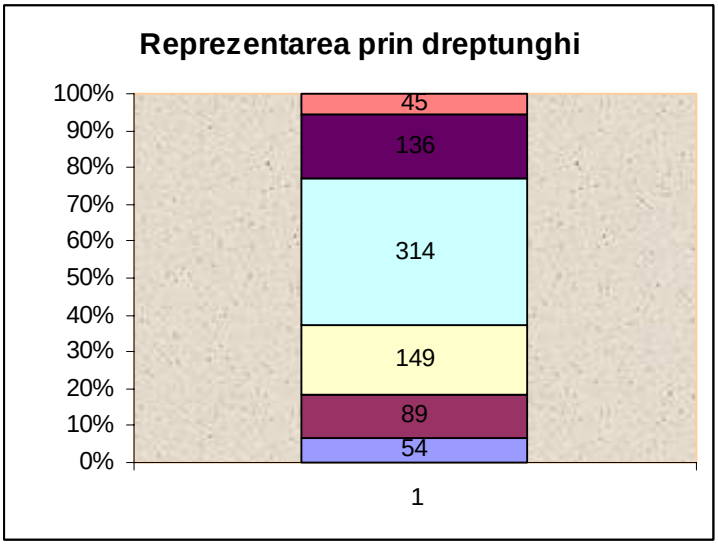
În acest caz suprafața unui dreptunghi sau a unui cerc este de 100%.

Exemplu 2.

Să considerăm distribuția mediilor studenților după prima sesiune de examene:

1	Sub 5	54
2	Între 5 şi 6	89
3	Între 6 şi 7	149
4	Între 7 şi 8	314
5	Între 8 şi 9	136
6	Între 9 şi 10	45

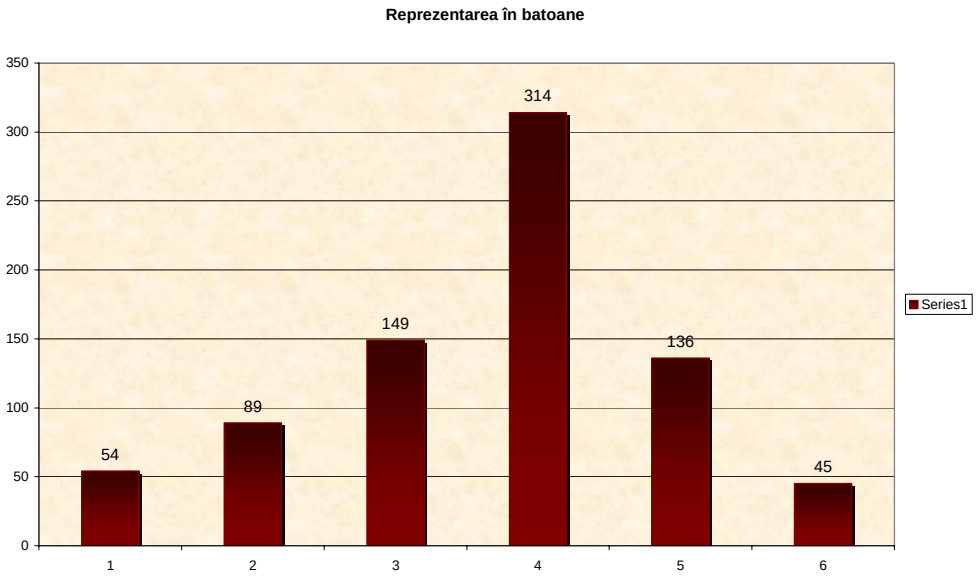




2.) Diagrame prin coloane sau benzi.

Înălțimile acestor dreptunghiuri sunt proporționale cu frecvențele caracteristicilor corespunzătoare.

Considerăm datele din exemplul 2:



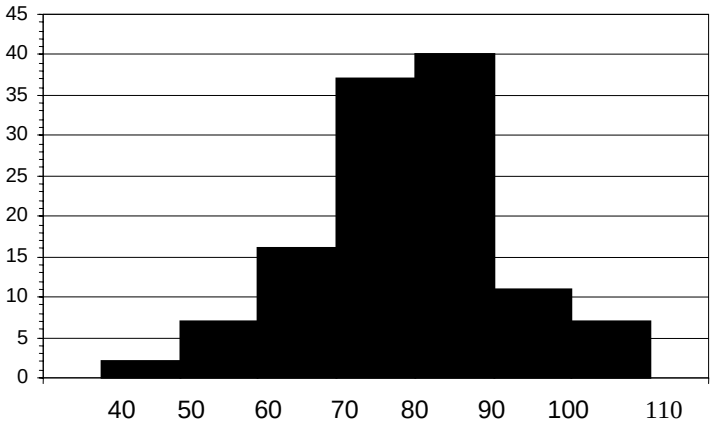
5.) Histogramă.

Fiind dată o serie cu clase de valori de amplitudini egale, obținem histograma acestei serii statistice dacă luăm pe axa orizontală o succesiune de segmente egale, care vor reprezenta amplitudinea claselor şi ridicăm, pe fiecare dintre aceste segmente considerate ca baze, dreptunghiuri cu înălțimi proporționale cu frecvențele (absolute sau relative) ale claselor respective.

Să presupunem că s-a măsurat greutatea unui eşantion de 120 de persoane. Dăm pe clase de valori şi frecvențe rezultatele obținute.

Clasa de valori	**Frecvența absolută**	**Frecvența absolută cumulată crescător**	**Frecvența absolută cumulată descrescător**
[40,50)	2	2	120
[50,60)	7	9	118
[60,70)	16	25	111
[70,80)	37	62	95
[80,90)	40	102	58
[90,100)	11	113	18
[100,110)	7	120	7

Histograma corespunzătoare este:



6.) Poligonul frecvențelor.

Dacă din mijlocul fiecărei segment de pe axa (Ox) ridicăm segmente proporționale cu frecvențele claselor corespunzătoare şi unim printr-o linie poligonală extremitățile superioare ale acestor segmente, obținem **poligonul frecvențelor**.

7.) Dacă aceleaşi puncte le unim nu printr-o linie poligonală, ci printr-o curbă, obținem **curba de distribuție** a seriei respective.

4.3. Valori caracteristice ale unei serii statistice.

Definiția 5.3.1. Se numeşte ***valoare centrală*** a unei clase de variație, media aritmetică a extremităților acelei clase.

Definiția 5.3.2. Se numeşte ***modulul*** sau ***dominanta*** unei serii statistice valoarea caracteristicii corespunzătoare celei mai mari frecvențe, în cazul când valorile caracteristicii sunt date individual şi valoarea centrală a clasei corespunzătoare celei mai mari frecvențe în cazul variabilelor continue .

Definiția 5.3.3.Se numeşte ***mediană*** a unei serii statistice numărul **x** care are proprietatea că există tot atâtea unități statistice corespunzătoare valorilor mai mici decât **x** ca şi cele corespunzătoare valorilor mai mari decât **x**.

Exemplul 1 a) Dacă o caracteristică ia valorile 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9 , atunci ***5*** este mediana, deoarece avem cinci valori mai mici decât 5 şi cinci valori mai mari decât 5.

b) Dacă o caracteristică ia valorile 1, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , atunci se va lua ca mediana media aritmetică a numerelor situate la mijloc (dacă ele au fost scrise în ordinea mărimii).În acest caz, mediana este ***4,5***.

Definiția 5.3.4. Se numeşte ***amplitudine*** a unei serii statistice cu caracteristică discretă diferența dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare a caracteristicii.

Observație. În cazul seriilor statistice cu caracteristică continuă amplitudinea este diferența dintre limita superioară a caracteristicii corespunzătoare clasei cu cea mai mare frecvență şi limita inferioară a caracteristicii corespunzătoare clasei cu cea mai mică frecvență (ne referim la caracteristici cantitative şi nu calitative).

Fie dată repartiția statistică a unei caracteristici **x**:

Valoarea	**Frecvența**
x_1	n_1
x_2	n_2
….	….
x_n	n_n

Definiția 5.3.5. Prin ***valoarea medie*** a caracteristicii **x** înțelegem numărul real notat $\bar{x}$ şi dat de: $\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_n n_n}{n_1 + n_2 + ... + n_n}$

Observație.a) În cazul când valorile caracteristice sunt grupate în clase, în calculul valorii medii se vor folosi valorile centrale ale claselor respective.

b)Dacă notăm cu $f_i = \frac{n_i}{N}$, unde N= $n_1 + n_2 + ... + n_n$, atunci

$\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n$

Definiția 5.3.6. Prin ***dispersia*** repartiției statistice a unei caracteristici **f**, având media $\bar{x}$, înțelegem numărul real notat σ^2 şi dat de:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + ... + (x_N - \bar{x})^2 \cdot n_N}{n_1 + n_2 + ... + n_N}.$$

Definiția 5.3.7. Numărul real $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ se numește ***abaterea medie pătratică*** a repartiției statistice.

Exemplu 2.

Pentru un hibrid de porumb H s-a analizat numărul de boabe pe rând, în vederea comparării cu alți hibrizi. Astfel s-au ales 20 ştiuleți , şi în urma măsurătorii s-au obținut datele din tabelul următor:

Nr. Crt.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nr. boabe	32	35	34	38	32	37	37	34	39	38	33	37	35	38	37	32	36	40	39	34

Se cere:

a) Să se facă gruparea datelor;

b) Să se completeze tabelul statistic obținut la punctul a) cu frecvențele relative, frecvențele absolute cumulate crescător sau descrescător şi frecvențele relative cumulate crescător sau descrescător;

c) Să se calculeze modulul, mediana, dispersia şi abaterea medie pătratică;

Rezolvare.

a) Caracteristica este dată de numarul de boabe. (minimul = 320,10 iar maximul = 40).

Notăm cu x_i caracteristica, iar n_i numărul de ştiuleți carea au caracteristica $\mathbf{x_i}$.

$\mathbf{x_i}$	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\mathbf{n_i}$	3	1	3	2	1	4	3	2	1

b) Cu relațiile de calcul pentru frecvențe se obține tabelul:

x_i	n_i	f_i	$n_a\uparrow$	$n_a\downarrow$	$f_i\uparrow$	$f_i\downarrow$
32	3	0,15	3	20	0,15	1
33	1	0,05	4	17	0,2	0,85
34	3	0,15	7	16	0,35	0,8
35	2	0,1	9	13	0,45	0,65
36	1	0,05	10	11	0,5	0,55
37	4	0,2	14	10	0,7	0,5
38	3	0,15	17	6	0,85	0,3
39	2	0,1	19	3	0,95	0,15
40	1	0,05	20	1	1	0,05

Exemplu de calcul: $f_1 = \frac{3}{20} \cong 0{,}15;$

.

c) **Modulul** este **37**, deoarece corespunde celei mai mari frecvențe.

$$\overline{X} = \frac{32 \cdot 3 + 33 \cdot 1 + 34 \cdot 3 + 35 \cdot 2 + 36 \cdot 1 + 37 \cdot 4 + 38 \cdot 3 + 39 \cdot 2 + 40 \cdot 1}{20} = 35.85 .$$

$$\sigma^2 = \frac{3 \cdot (32 - 35.85)^2 + 1 \cdot (33 - 35.85)^2 + 3 \cdot (34 - 35.85)^2 + ... + 1 \cdot (40 - 35.85)^2}{20} = 6{,}027$$

Aşadar σ^2=6,0275, iar σ=2,455.

Observație: Abaterea medie pătratică precum şi dispersia unei repartiții statistice caracterizează împrăştierea valorilor în jurul valorii medii; cu cât este mai mică abaterea medie pătratică, cu atât valorile caracteristicii seriei statistice se grupează mai mult în jurul valorii medii.

Referat nr. 1

1.Folosind metoda lui Gauss, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

2.Folosind metoda lui Gauss-Jacobi, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 6 \\ -2x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -7 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$$

3.Folosind metoda transformărilor elementare , sa se determine inversa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Se consideră vectorul $\bar{x} = (2,-1,5)$ scris în baza canonică B=$\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ din R^3, unde: $\bar{e}_1$=(1,0,0), $\bar{e}_2$=(0,1,0), $\bar{e}_3$=(0,0,1).Să se determine coordonatele sale în baza B'=$\{ \bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\}$, unde: $\bar{e}_1'$=(1,1,0), $\bar{e}_2'$=(2,0,-1), $\bar{e}_3'$=(3,1,2).

5. Utilizând metoda grafică, să se rezolve următoarea problemă de programare liniară.:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 \leq 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \\ 2x + y - 4 \leq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}, \quad (min/max) f(x,y) = -x + y$$

6.Utilizând algoritmul simplex primal, să se rezolve următoarea problemă de programare liniară.

$$\begin{cases} [1]: \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 57 \end{cases} \\ [2]: \ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,3} \\ [3]: (\max.) f(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 + 5x_3, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \end{cases}$$

7. Un porumbel voiajor se întoarce la locul de plecare cu probabilitatea 0,8. Care este probabilitatea ca din 8 porumbei voiajori cu aceeaşi probabilitate de întoarcere, să se întoarcă 6?

8.Patru tractoare ce sunt folosite într-o ferma agricolă se pot defecta într-un schimb cu probabilitățile 5%, 3%, 4% şi respectiv 10%.Care este probabilitatea ca într-un schimb saă nu se defecteze nici un tractor?

9.Se dau variabilele aleatoare independente:

$$X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p+\frac{1}{5} & q+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{şi } Y:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p-q & 12p^2 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartiția variabilei aleatoare XY.

10.Un lot de piese de combină conține 12 piese bune şi 4 defecte. Se selecționează 4 piese la întâmplare (fără revenire). Să se construiască tabloul de repartiție al numărului d epiese defecte şi să se calculeze media şi dispersia variabilei aleatoare obținute.

11. Fie X abaterea diametrului interior al unor inele de la diametrul standard. În urma unei selecții repetate, efectuată din producția de inele, s-a obținut repartiția statistică:

Abaterea diametrului	-4	-3	-2	-1	0	2	3
Frecvența absolută	1	4	3	9	10	2	1

a) Să se completeze tabelul statistic cu frecvențele relative, frecvențele absolute cumulate crescător sau descrescător şi frecvențele relative cumulate crescător sau descrescător;

b) Să se calculeze modulul, mediana, dispersia şi abaterea medie pătratică;

Referat nr. 2

1.Folosind metoda lui Gauss, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

2.Folosind metoda lui Gauss-Jacobi, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

3.Folosind metoda transformărilor elementare , sa se determine inversa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Se consideră vectorul $\bar{x} = (1,2,-1)$ scris în baza canonică B=$\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ din R^3, unde: $\bar{e}_1$=(1,0,0), $\bar{e}_2$=(0,1,0), $\bar{e}_3$=(0,0,1).Să se determine coordonatele sale în baza B'=$\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\}$, unde: $\bar{e}_1'$=(1,0,0), $\bar{e}_2'$=(2,1,1), $\bar{e}_3'$=(0,0,1).

6.Utilizând algoritmul simplex primal, să se rezolve următoarea problemă de programare liniară.

$$\begin{cases} [1]: \begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases} \\ [2]: \ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5} \\ [3]: (\max.) f(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 20x_5, \ \ \bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5 \end{cases}$$

7. Trei tunuri trag asupra unei ținte. Probabilitațile de atingere a țintei pentru cele trei tunuri sunt respectiv 0,6, 0,8, 0,7. Se cere probabilitatea ca ținta să fie atinsă cel puțin odată.

8.Se extrage la întâmplare un număr dintr+o urnă ce conține numerele de la 1 la 100. Care este probabilitatea ca numărul extras sa fie multiplu de 3 sau de 4, dar sa nu fie nici pătrat perfect şi nici cub perfect?

9.Să se calculeze media şi dispersia variabilei aleatore 2X+3Y, unde X şi Y sunt variabile aleatore independente, cu repartițiile:

$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$ şi $Y: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$

BIBLIOGRAFIE

1. **BURDUJAN, I.** –Matematici cu aplicaţi în biologie. Ed. „Ion Ionescu de la Brad”, 1999.
2. **CEAPOIU, N.** –Metode statistice aplicate în experienţele agricole şi biologice. Ed. Agrosilvică, Bucureşti, 1968.
3. **DANCEA, I.** –Metode de optimizare. Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
4. **DIACONIŢA, V., RUSU, GH**. –Optimizări liniare. Ed. Sedcom Libris, Iaşi, 2001.
5. **DIACONIŢA, V., SPÎNU, M., RUSU, GH.** –Matematici aplicate în economie. Ed. Sedcom Libris”, Iaşi, 2004.
6. **ISPAS, M, MANOLE, D.** –Matematici speciale aplicate în agronomie (aplicate în agronomie).Ed. I.Ionescu de la Brad, , 2004
7. **MICULA, M.** –Matematici aplicate în agronomie. Ed. Transilvania-Press, Cluj-
8. **MIHOC, GH., MICU, N.** –Teoria probabilităţilor şi statistică matematică. E.D.P., 1980.
9. **PROCOPIUC, GH., SLABU, GH., ISPAS, M.** – Matematică (teorie şi aplicaţii). Ed. „Gh. Asachi” Iaşi, 2001.
10. . **L. RĂILEANU** – Matematici cu aplicaţii în Biologie, Rotaprint Univ. „Al. I. Cuza” Iaşi, 1978
11. **SNEDECOR, G.W.,** -Metode statistice aplicate în cercetarea din agricultură şi biologie. E.D.P., Bucureşti, 1968.